

平面力系的简化与平衡

平面力系是工程中最常见的力系,在建筑工程中很多实际问题都可以简化为平面力系来处理。平面力系可分为平面汇交力系、平面力偶系和平面任意力系(也称平面一般力系)。本章主要介绍以上三种力系的简化和平衡问题,学习过程中应重点掌握平面力系的简化和平衡方程及其应用。

2.1 平面汇交力系

在工程实际中经常遇到平面汇交力系,平面汇交力系是指作用在物体上的各力的作用线都相交于一点的平面力系。如图 2-1(a)所示,起重机起吊构件时,吊钩 C 上有三个力,分别是钢绳拉力 F_1 及两个缆绳的拉力 F_2 和 F_3 ,它们都在同一个铅垂平面内并汇交于一点,组成一个平面汇交力系;又如图 2-1(b)所示的钢架的角撑板承受四个力 F_1 、 F_2 、 F_3 、 F_4 的作用,各力的作用线位于同一平面内且汇交于一点,也组成一个平面汇交力系。

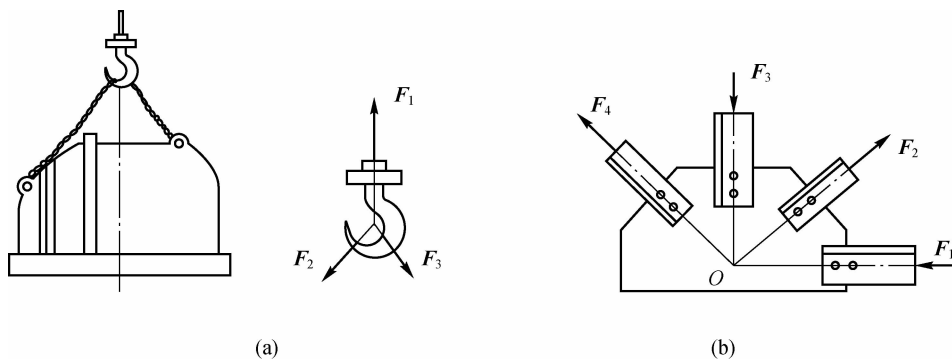


图 2-1 平面汇交力系

(a) 起重机吊钩及其受力图 (b) 钢架的角撑板

平面汇交力系是最简单的平面力系之一,是研究复杂力系的基础。本节分别用几何法(作图法)和解析法(计算法)讨论平面汇交力系的合成(简化)与平衡问题。

2.1.1 平面汇交力系合成与平衡的几何(作图)法

1. 平面汇交力系合成的几何法

如图 2-2(a)所示,设在刚体的 O 点上作用一平面汇交力系,其合力 $\mathbf{F}_R$ 可通过连续使用力的三角形法则将各力依次合成来求得。即先作 $\mathbf{F}_1$ 、 $\mathbf{F}_2$ 的合力 $\mathbf{F}_{R1}$,再将 $\mathbf{F}_{R1}$ 与 $\mathbf{F}_3$ 合成为 $\mathbf{F}_{R2}$,最后求出 $\mathbf{F}_{R2}$ 与 $\mathbf{F}_4$ 的合力 $\mathbf{F}_R$ 。力 $\mathbf{F}_R$ 即该平面汇交力系 $\mathbf{F}_1$ 、 $\mathbf{F}_2$ 、 $\mathbf{F}_3$ 、 $\mathbf{F}_4$ 的合力,可用矢量式表示为

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 \quad (2-1)$$

由图 2-2(b)可知, $\mathbf{F}_{R1}$ 、 $\mathbf{F}_{R2}$ 可以省略,求合力 $\mathbf{F}_R$ 时,只需将力 $\mathbf{F}_1$ 、 $\mathbf{F}_2$ 、 $\mathbf{F}_3$ 、 $\mathbf{F}_4$ 首尾相连,形成一条折线,最后把第一个力的起点和最后一个力的终点用有向线段 $\mathbf{F}_R$ 连接,形成一个封闭的多边形 $ABCDE$,力 $\mathbf{F}_1$ 、 $\mathbf{F}_2$ 、 $\mathbf{F}_3$ 、 $\mathbf{F}_4$ 和合力 $\mathbf{F}_R$ 构成的多边形称为此平面汇交力系的力的多边形。该封闭边即该平面汇交力系的合力 $\mathbf{F}_R$ 的大小和方向,如图 2-1(c)所示,合力仍作用在力系的汇交点。这种用力的多边形求合力的作图规则称为力的多边形法则。

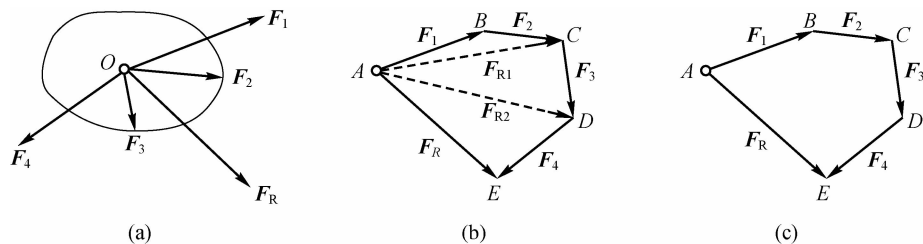


图 2-2 力的多边形法则

(a)平面汇交力系 (b)力的合成方法 (c)力的多边形

如果平面汇交力系由 n 个力组成,也可以采用上述力的多边形法则得到合力 $\mathbf{F}_R$ 。于是得到结论:平面汇交力系合成的结果是一个合力,其大小和方向由力的多边形的封闭边代表,作用线通过力系中各力作用线的汇交点。

合力 $\mathbf{F}_R$ 的表达式为

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$$

或简写为

$$\mathbf{F}_R = \sum \mathbf{F} \quad (2-2)$$

用力的多边形法则求汇交力系合力的方法称为汇交力系合成的几何法。在力的合成中需要注意以下两点:

- (1)合力 $\mathbf{F}_R$ 的作用线必通过汇交点。
- (2)改变力系合成的顺序,只改变力的多边形的形状,并不影响最后的结果。即不论如何合成,合力 $\mathbf{F}_R$ 是唯一的。

2. 平面汇交力系平衡的几何条件

由平面汇交力系的合成结果可知,平面汇交力系合成的结果为一个合力。因此,若平面汇交力系为平衡力系,则合力必为零;反之,若合力为零,则平面汇交力系必为平衡力系。由此可见,平面汇交力系平衡的充要条件是:该力系的合力等于零。即

$$\mathbf{F}_R = 0 \quad (2-3)$$

因此,平面汇交力系平衡的充要几何条件是:力的多边形首尾相连、自行封闭。

【例 2-1】 支架的横梁 AB 与斜杆 CD 彼此以铰链 C 相连接,并各以铰链 A 、 D 连接于铅直墙上,如图 2-3(a)所示。已知 $AC=CB$,杆 CD 与水平线成 45° 角,荷载 $F_P=10\text{ kN}$,作用于 B 处。设梁和杆的重量忽略不计,求铰链 A 的约束反力和杆 CD 所受的力。

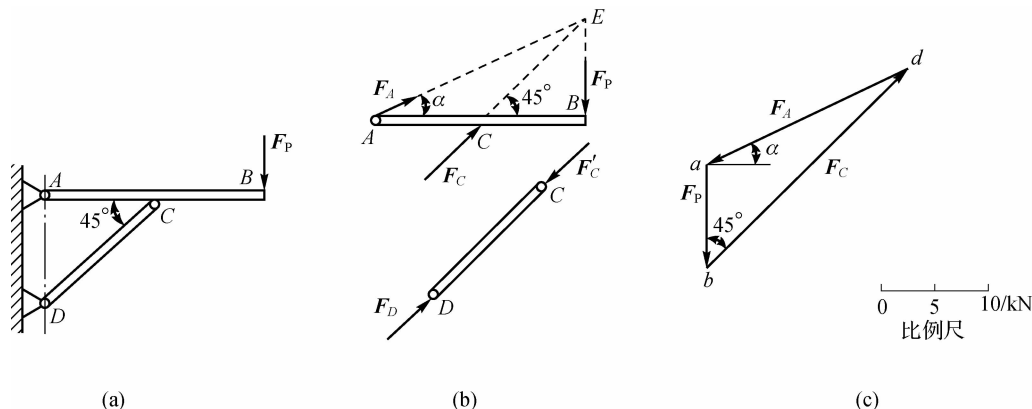


图 2-3 【例 2-1】图

(a) 支架 (b) 横梁 AB 、斜杆 CD 受力图 (c) 封闭的力三角形

【解】 选取横梁 AB 为研究对象。横梁在 B 处受荷载 F_P 的作用。 CD 为二力杆,它对横梁 C 处的约束反力 F_C 的作用线必为沿两铰链 C 、 D 中心的连线。铰链 A 的约束反力 F_A 的作用线可根据三力平衡汇交定理确定,即通过另外两个力的交点 E ,如图 2-3(b)所示。

根据平面汇交力系平衡的几何条件, F_A 、 F_C 、 F_P 应组成一个封闭的力的三角形。按照图中力的比例尺,先画出已知力 $ab=F_P$,再由点 a 作直线 ad 平行于 AE ,由点 b 作直线 db 平行于 CE ,这两直线相交于点 d ,如图 2-3(c)所示。由于横梁 AB 处于平衡状态,因此 $\triangle abd$ 自行封闭,可确定力 F_C 和 F_A 的大小,量出它们的长度,按比例尺算得 $F_C=28.3\text{ kN}$, $F_A=22.4\text{ kN}$ 。

根据作用力与反作用力的关系,作用于杆 CD 的 C 端的力 F'_C 与 F_C 的大小相等,方向相反。由此可知杆 CD 受压力,如图 2-3(b)所示。

2.1.2 平面汇交力系合成与平衡的解析(计算)法

解析法是以力在坐标轴上的投影作为基础来进行计算的方法,利用解析法可以将力矢量转化为代数量进行运算。为此先介绍关于力在坐标轴上的投影的概念。

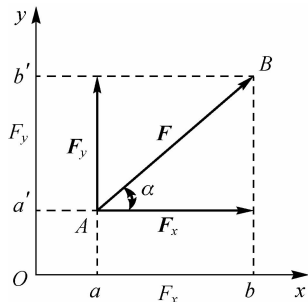


图 2-4 力的投影

1. 力在直角坐标轴上的投影

如图 2-4 所示,设力 F 作用在一构件上,在力 F 所在的平面内取直角坐标系 Oxy ,过力 F 的两端点 A 和 B 分别向 x 、 y 轴作垂线,垂足为 a 、 b 及 a' 、 b' ,将线段 ab 与 $a'b'$ 的长度冠以适当的正负号,称为力 F 在 x 、 y 轴上的投影,记为 F_x 、 F_y 。力的投影是代数量,为了加以区别,需要规定投影的正负:当 a 到 b (或 a' 到 b') 的方向与 x 轴(y 轴)的正向一致时,力的投影取正

值;反之,取负值。

力在坐标轴上的投影与力的大小及方向有关。

一般情况下,若已知力 F 与 x (或 y) 轴的夹角为 α , 则该力在 x 、 y 轴上的投影分别为

$$\left. \begin{aligned} F_x &= \pm F \cos \alpha \\ F_y &= \pm F \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (2-4)$$

由上式知:当力与投影轴垂直时,力在轴上的投影为零;当力与投影轴平行时,力在轴上投影大小的绝对值等于该力的大小。

若已知力 F 在直角坐标轴上的投影 F_x 、 F_y , 则可求出该力的大小和方向为

$$\left. \begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \\ \tan \alpha &= \left| \frac{F_y}{F_x} \right| \end{aligned} \right\} \quad (2-5)$$

式中, α 为力 F 与 x 轴所夹的锐角;力 F 的具体方向由 F_x 、 F_y 的正负号来确定。

尤其要注意的是:力在轴上的投影是代数量,而力沿轴的分力是矢量。

【例 2-2】 如图 2-5 所示,已知 $F_1=100 \text{ N}$, $F_2=200 \text{ N}$, $F_3=300 \text{ N}$, $F_4=400 \text{ N}$, 试分别求出各力在 x 轴和 y 轴上的投影。

【解】 根据式(2-4)可得出各力在 x 、 y 轴上的投影为

$$F_{x1}=100 \times \cos 0^\circ=100 \text{ N} \quad F_{y1}=100 \times \sin 0^\circ=0$$

$$F_{x2}=-200 \times \cos 60^\circ=-100 \text{ N} \quad F_{y2}=200 \times \sin 60^\circ=100\sqrt{3} \text{ N}$$

$$F_{x3}=-300 \times \cos 60^\circ=-150 \text{ N} \quad F_{y3}=-300 \times \sin 60^\circ=-150\sqrt{3} \text{ N}$$

$$F_{x4}=400 \times \cos 45^\circ=200\sqrt{2} \text{ N} \quad F_{y4}=-400 \times \sin 45^\circ=-200\sqrt{2} \text{ N}$$

2. 合力投影定理

由式(2-5)知,如能求出合力在正交坐标轴 x 、 y 轴上的投影,则合力的大小和方向就可以确定。为此需讨论合力及其分力在同一坐标轴上投影的关系。

图 2-6 所示为平面汇交力系的各力 F_1 、 F_2 、 F_3 、 F_4 组成的力的多边形, F_R 为合力。将力的多边形中各力投影到 x 轴上,可以得到

$$F_{Rx}=F_{x1}+F_{x2}+F_{x3}+F_{x4}$$

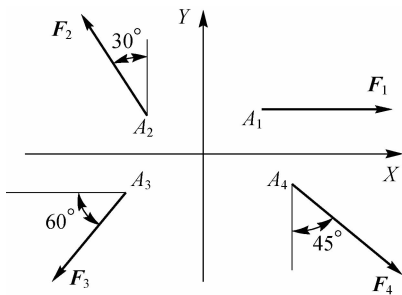


图 2-5 【例 2-2】图

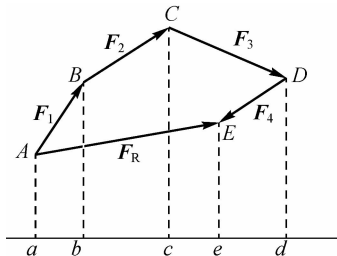


图 2-6 合力投影定理

由投影定义知,上式左端为合力 F_R 的投影,右端为四个分力的投影的代数和。这一关系可推广到任一汇交力系的情形,即

$$F_{Rx} = F_{x1} + F_{x2} + \cdots + F_{xn} = \sum F_x \quad (2-6)$$

于是得到合力投影定理:合力在任一轴上的投影等于各分力在同一轴上投影的代数和。

3. 平面汇交力系合成的解析法

当平面汇交力系为已知时,如图 2-7 所示,可建立一个直角坐标系 Oxy ,先求出力系中各力在 x 轴和 y 轴上的投影,再根据合力投影定理求得合力 F_R 在 x 、 y 轴上的投影 F_{Rx} 、 F_{Ry} ,由图 2-7 中的几何关系可知,合力 F_R 的大小和方向可由式(2-7)确定。

$$\left. \begin{aligned} F_R &= \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} \\ \tan \alpha &= \left| \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} \right| = \left| \frac{\sum F_y}{\sum F_x} \right| \end{aligned} \right\} \quad (2-7)$$

式中, α 为合力 F_R 与 x 轴所夹的锐角;合力 F_R 在哪个象限由 F_{Rx} 和 F_{Ry} 的正负号来确定,合力的作用线通过力系的汇交点 O 。

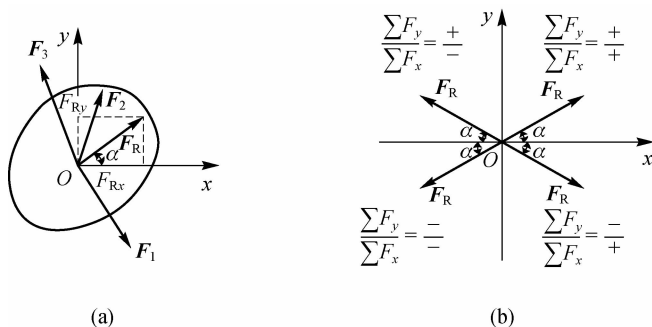


图 2-7 平面汇交力系的合成图

(a)平面汇交力系的合成图 (b)合力 F_R 的方向与 X 和 Y 的正负号关系

4. 平面汇交力系平衡的解析条件

平面汇交力系平衡的充要条件是力系的合力等于零。由式(2-7)可知,要满足 $F_R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} = 0$,其充要条件为

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-8)$$

即平面汇交力系平衡的充分必要(解析)条件是:力系中各力在 X 、 Y 坐标轴上的投影的代数和都等于零。

式(2-8)称为平面汇交力系的平衡方程。平面汇交力系有两个独立的平衡方程,可以用来求解两个未知量。

用解析法求未知的约束力时,约束力的指向要事先假定。在平衡方程中解出的未知力若为正值,说明预先假定的指向是正确的;若为负值,说明实际指向与假定的方向相反。

【例 2-3】 如图 2-8(a)所示的三角支架,已知挂在 B 点的物体自重为 G ,试求 AB 、 BC 两杆所受的力。

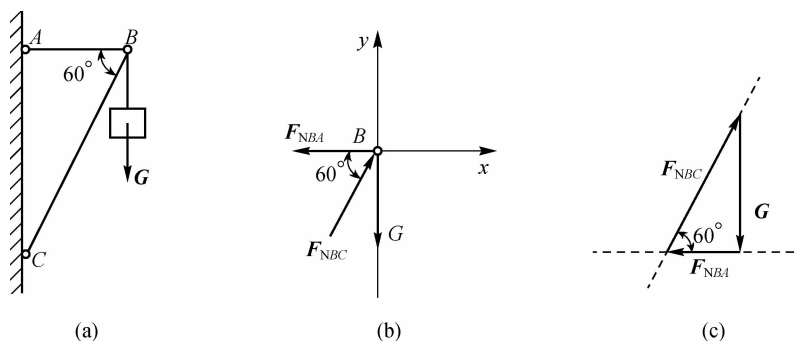


图 2-8 【例 2-3】图

(a)三角支架 (b)三角支架受力图 (c)几何法

【解】 方法一:应用平面汇交力系的解析法求解。

(1)取铰 B 为研究对象。

(2)对铰 B 进行受力分析,画受力图。由于 AB 、 BC 两杆为二力杆件,因此 B 点受已知力 G 和未知力 F_{NBA} 、 F_{NBC} 三个力作用而处于平衡状态,三角支架受力图如图 2-8(b)所示。因三力作用于同一点 B ,故该力系为平面汇交力系。

(3)列平衡方程并求解。题中只有两个未知力 F_{NBA} 、 F_{NBC} ,用平衡方程中的两个投影方程即可求解。

$$\sum F_x = 0, \quad F_{NBC} \cos 60^\circ - F_{NBA} = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{NBC} \sin 60^\circ - G = 0$$

$$F_{NBC} = \frac{G}{\sin 60^\circ} = 1.15G$$

$$F_{NBA} = F_{NBC} \cos 60^\circ = G \cot 60^\circ = 0.577G$$

方法二:应用平面汇交力系的几何法求解。

此题也可应用平面汇交力系平衡的几何条件,作一个自行封闭的力三角形,再解这个三角形即可。根据铰 B 平衡可知,力的多边形自行封闭,首先按已知力 G 的方向作出 G 的作用线,再过 G 的起点和终点分别作出力 F_{NBA} 、 F_{NBC} 的作用线,依次将各力首尾相接,根据力的三角形自行封闭可确定 F_{NBA} 、 F_{NBC} 的指向,如图 2-8(c)所示。

计算直角三角形,可得

$$F_{NBC} = \frac{G}{\sin 60^\circ} = 1.15G$$

$$F_{NBA} = G \cot 60^\circ = 0.577G$$

【例 2-4】 简易起重机如图 2-9 所示,起吊钢丝绳绕过定滑轮 B ,通过铰车把重物吊起。重物重 20 kN , A 、 B 、 C 三处为铰链连接。不计各杆的自重和滑轮的尺寸。求 AB 和 BC 杆所受的力。

【解】 (1)选取研究对象。根据已知力和未知力都与 B 有关,把滑轮 B 连同销钉一起作为研究对象。

(2)对 B 点做受力分析,画其受力图,如图 2-10(b)所示。 B 点受四个力的作用而平衡,其分别为两根绳子的拉力 G 、 F_T ,二力杆件 AB 和 BC 的作用力 F_{NBA} 、 F_{NBC} 。

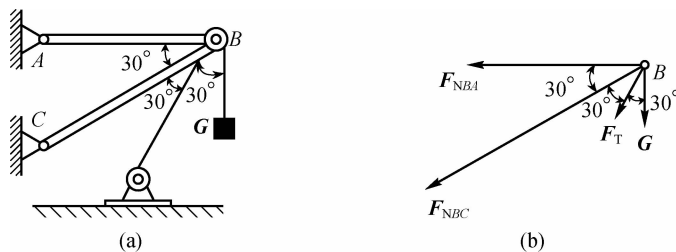


图 2-9 【例 2-4】图
(a) 简易起重机 (b) B 点受力图

(3) 列平衡方程并求解。

$$\sum F_x = 0, \quad -F_{NBA} - F_{NBC} \cos 30^\circ - F_T \sin 30^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad -F_{NBC} \sin 30^\circ - F_T \cos 30^\circ - G = 0$$

其中, $F_T = G$ 。

解得 $F_{NBC} = -74.64 \text{ kN (压)}$, $F_{NBA} = 54.64 \text{ kN (拉)}$ 。

F_{NBA} 计算结果为正值, 说明其实际方向与图中所假设的方向相同, 即为拉力; F_{NBC} 的计算结果为负, 说明其实际方向与图中所假设的方向相反, 即为压力。

F_{NBA} 、 F_{NBC} 是两个二力杆 AB 和 BC 提供给 B 的作用力, 根据作用力与反作用力的关系可知, AB 和 BC 杆所受的力 F'_{NBA} 、 F'_{NBC} 的数值为 $F'_{NBC} = -74.64 \text{ kN (压)}$, $F'_{NBA} = 54.64 \text{ kN (拉)}$ 。

2.1.3 力对点之矩

力对刚体的作用不仅可使刚体产生移动效应, 也可使刚体产生转动效应。力对刚体的移动效应可用力矢来度量; 而力对刚体的转动效应可用力对点之矩 (简称力矩) 来度量, 即力矩是度量力对刚体转动效应的物理量。

如图 2-10 所示, 用扳手转动螺母, 在扳手上作用一力 F , 扳手和螺母将绕螺母中心 O 转动。力 F 使扳手与螺母绕 O 转动的效应既与力 F 的大小有关, 也与 O 点到力 F 的作用线的垂直距离 h 有关。通常顺时针转动扳手时, 螺母被拧紧; 逆时针转动扳手时, 螺母被松开。用手推门, 使得门板绕门轴转动也是相同的原理。

如图 2-11 所示, 设平面上作用一力 F , 在该平面内任取一点 O , 点 O 称为矩心, 点 O 到力 F 作用线或其延长线的垂直距离 h 称为力臂。

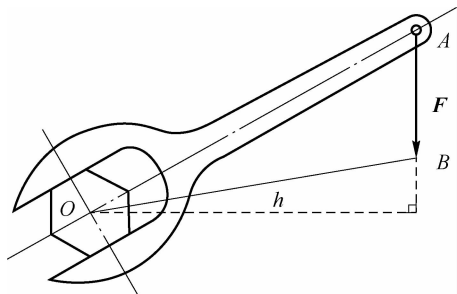


图 2-10 力矩

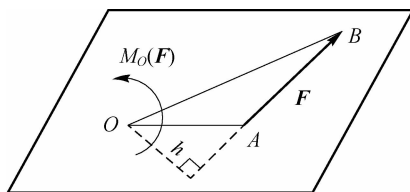


图 2-11 力臂

在平面问题中, 力对点之矩是一个代数量, 其绝对值等于力的大小与力臂的乘积, 正负的确方法为: 力使物体绕矩心逆时针转向时为正, 反之为负。

力 F 对于点 O 的矩用 $M_O(F)$ 表示, 即

$$M_O(F) = \pm Fh \quad (2-9)$$

由图 2-11 易知:

$$|M_O(F)| = |F \cdot h| = 2S_{\triangle OAB} \quad (2-10)$$

应当指出, 力对点之矩与矩心的位置有关, 计算时应当指出矩心位置。但是, 当力的作用线通过矩心时, 则力对该点之矩等于零, 此时力对刚体不能产生转动效果。力矩的常用单位为 $\text{N} \cdot \text{m}$ 或 $\text{kN} \cdot \text{m}$ 。

【例 2-5】 一起重扒杆受力如图 2-12 所示, 已知 $F_1 = 50 \text{ kN}$, $F_2 = 100 \text{ kN}$ 。试分别求此二力对点 A 的矩。

解 力 F_1 垂直于 AB , 力臂为 6 m , 故力 F_1 对 A 点的矩为

$$M_O(F_1) = 50 \times 6 = 300 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

力 F_2 对 A 点的力臂 AC 要在 $\triangle ABC$ 中求出, 即

$$AC = AB \sin 30^\circ = 6 \times 0.5 = 3 \text{ m}$$

故 $M_O(F_2) = -100 \times 3 = -300 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 。

F_2 对 A 点的矩转向是顺时针的, 故为负值。

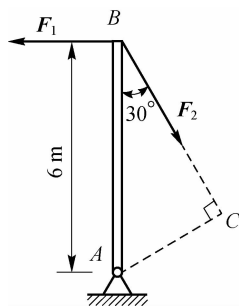


图 2-12 【例 2-5】图

2.1.4 合力矩定理

合力矩定理: 平面汇交力系的合力对力系所在平面内任一点之矩等于各分力对该点之矩的代数和。即

$$M_O(F_R) = \sum M_O(F_i) \quad (2-11)$$

合力矩定理建立了合力对某点的矩与各个分力对同一点之矩的关系。无论何种力系, 只要力系有合力, 合力矩定理就适用。

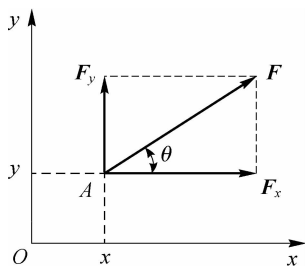


图 2-13 力矩的分解

如图 2-13 所示, 已知力 F 、作用点 $A(x, y)$ 及夹角 θ , 求力 F 对坐标原点 O 之矩。可用式 (2-11) 求解分力 F_x 、 F_y 对点 O 之矩而得到, 即

$$M_O(F) = M_O(F_y) + M_O(F_x) = xF \sin \theta - yF \cos \theta$$

即

$$M_O(F) = xF_y - yF_x \quad (2-12)$$

式 (2-12) 称为平面内力矩的解析表达式。

【例 2-6】 如图 2-14 所示的简支刚架, 已知 F 、 a 、 b 和 α 。试计算力 F 对点 A 的矩。

解 方法一: 根据定义求 $M_A(F)$ 。

先计算力臂 d , 由图中的几何关系有

$$d = AE \sin \alpha = (AD - ED) \sin \alpha = (a - b \cot \alpha) \sin \alpha = a \sin \alpha - b \cos \alpha$$

故 $M_A(F) = Fd = F a \sin \alpha - F b \cos \alpha$ 。

方法二: 利用合力矩定理求 $M_A(F)$ 。

先将力 F 分解为相互垂直的两个分力 F_x 与 F_y , 然后利用合力矩定理求解, 即 $M_A(F) = M_A(F_x) + M_A(F_y) = -F_x b + F_y a = F a \sin \alpha - F b \cos \alpha$ 。

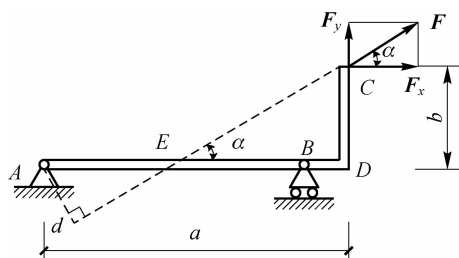


图 2-14 【例 2-6】图

2.2 平面力偶系

在生产实践和日常生活中,经常遇到大小相等、方向相反、作用线不重合的两个平行力所组成的力系。工程中把这种最简单的力系称为力偶。

2.2.1 力偶、力偶矩及力偶三要素

1. 力偶

力偶只能使物体产生转动效应而不能使物体产生移动效应。例如,用手拧水龙头、司机用双手转动方向盘等,如图 2-15(a)、(b)所示。

如图 2-15(c)所示,力 F 与 F' 构成一力偶,记作 (F, F') 。组成为力偶的两个力所在的平面称为力偶作用面。两个力的作用线之间的垂直距离 d 称为力偶臂,力偶使物体转动的方向称为力偶的转向。

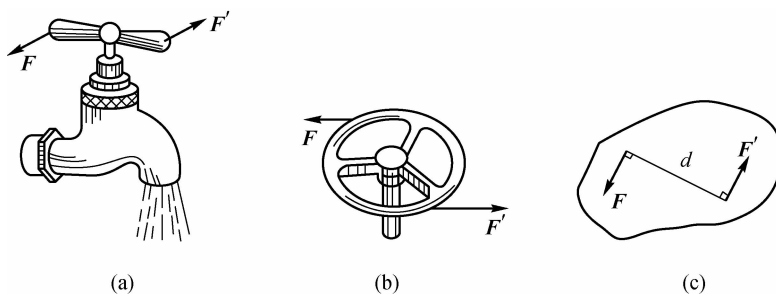


图 2-15 力偶

2. 力偶矩

力偶使物体转动的快慢,取决于力偶中力偶矩的大小。

实践表明,力偶中力 F 越大,或力偶臂越大,力偶使物体的转动效应就越强;反之就越弱。因此,可以用力偶中力的大小和力偶臂的乘积,加上适当的正负号来度量力偶对物体的转动效应,称为力偶矩。在力学中,用符号 $M(F, F')$ 或 M 表示。

$$M(F, F') = \pm Fd \quad (2-13)$$

力偶矩是代数量,规定:力偶逆时针转向时,力偶矩为正;反之为负。在平面力系中,力

偶矩的单位是 $\text{kN} \cdot \text{m}$ 或 $\text{N} \cdot \text{m}$ (与力矩的单位相同)。

3. 力偶的三要素

实践证明力偶对物体的作用效果取决于以下三个要素:

(1) 力偶矩的大小。物体转动的快慢取决于力偶矩的大小,即作用于物体上的力偶矩越大,物体的转动就越快;反之就越慢。因此,对力偶而言,无须知道力偶中力的大小和力偶臂的长度,只需要知道力偶矩就可以了。

(2) 力偶的转向。力偶的转向决定了物体的转向,当物体只在一个力偶作用下转动时,物体的转向与该力偶的转向相同。

(3) 力偶的作用平面。力偶的作用平面是指形成力偶的两个力的作用线所决定的平面。力偶只能使物体在其作用平面内转动。

力偶常用图 2-16 所示的符号表示。此符号非常形象地表示了力偶的三要素。

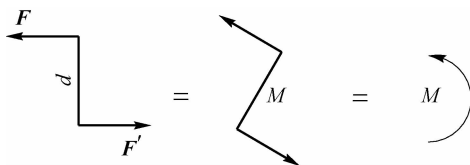


图 2-16 力偶图示

2.2.2 力偶的基本性质

性质 1: 力偶对其作用平面内任意一点的力矩,恒等于其力偶矩,而与矩心的位置无关。

性质 2: 力偶无合力,力偶不能与一个力等效,也不能与一个力平衡。

力偶无合力,故力偶对物体不会产生任何平动,力与力偶不能相互替代,不能构成平衡。因此,力与力偶是力系的两个基本元素。

根据力偶三要素及以上两个性质,可以对力偶做如下说明:

(1) 力偶可在其作用面内任意移转,而不改变它对物体的作用。

(2) 只要力偶矩不变,可任意改变力的大小和力偶臂的长短,而不改变力偶对物体的作用。

2.2.3 平面力偶系的简化

为了简化计算过程,可以把作用在结构或构件上的几个力偶进行合成,利用力偶的性质可以很容易解决平面力偶系的简化问题。

1. 两个力偶的简化

如图 2-17(a)所示,设在物体的同一平面上有两个力偶 M_1 和 M_2 的作用。其力偶矩为 $M_1 = F_1 d$, $M_2 = F_2 d$,为了求其合成结果,可在力偶作用面内任取一线段 AB ,使 $AB = d$,根据力偶等效性,将原力偶变换成两个等效力偶 (F_1, F'_1) 、 (F_2, F'_2) 。则 F_1 、 F_2 的大小分别为 $F_1 = \frac{M_1}{d}$, $F_2 = \frac{M_2}{d}$ 。将 F'_1 、 F'_2 和 F_1 、 F_2 分别在 A 、 B 两点合成,如图 2-17(b)所示,则有

$$F_R = F_1 - F_2, \quad F'_R = F'_1 - F'_2$$

F_R 与 F'_R 等值、反向、平行,组成一个新力偶,如图 2-17(c)所示。此新力偶即为原两力偶系的合力偶。

合力偶矩用 M 表示,即

$$M = F_R \cdot d = (F_1 - F_2) d = M_1 - M_2$$

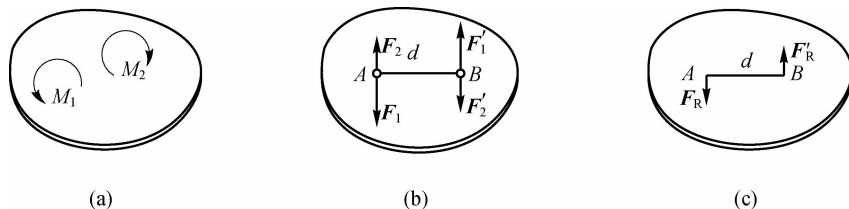


图 2-17 两个力偶的合成

(a)两个力偶 (b)合成过程 (c)合成结果

2. 平面力偶系的简化

由上述分析可知,对于 n 个力偶所组成的平面力偶系来说,根据力偶的等效性,若平面力偶系简化为一个合力偶,则其合力偶矩为

$$M = M_1 + M_2 + \cdots + M_n = \sum M_i \quad (2-14)$$

即对同一平面内的几个力偶可以进行代数运算。

由此,平面力偶系简化的结果是:平面力偶系可以简化成一个合力偶,合力偶矩等于各分力偶矩的代数和,也等于组成力偶系的各力对平面中任一点力矩的代数和。即

$$M = \sum M_O(F_i) \quad (2-15)$$

【例 2-7】 如图 2-18 所示,在同一平面内的物体受到三个力偶的作用,其中, $F_1 = 200 \text{ N}$, $F_2 = 400 \text{ N}$, $M = 150 \text{ N} \cdot \text{m}$,求其合成的结果。

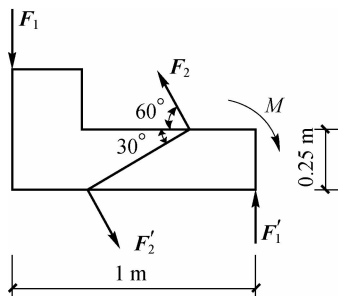


图 2-18 【例 2-7】图

【解】 规定以逆时针转的力偶矩为正,则三个力偶矩的数值和正负分别为

$$M_1 = F_1 d_1 = 200 \times 1 = 200 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_2 = F_2 d_2 = 400 \times \frac{0.25}{\sin 30^\circ} = 200 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_3 = -M = -150 \text{ N} \cdot \text{m}$$

由式(2-14)可知,三个同一平面内力偶合成的结果是一个合力偶,合力偶矩 M 为

$$M = \sum M_i = M_1 + M_2 + M_3 = 200 + 200 - 150 = 250 \text{ N} \cdot \text{m}$$

即合力偶矩的大小为 $250 \text{ N} \cdot \text{m}$, 转向为逆时针, 作用在原力偶系的平面内。

2.2.4 平面力偶系的平衡方程

由于平面力偶系合成的结果只能是一个合力偶, 当合力偶矩等于零时, 表明使物体顺时针方向转动的力偶与使物体逆时针方向转动的力偶相等, 作用效果相互抵消, 物体处于平衡状态。因此, 平面力偶系平衡的充要条件是: 平面力偶系中各力偶矩的代数和等于零。即

$$\sum M_i = 0 \quad (2-16)$$

或力偶系中各力对平面内任一点力矩的代数和为零。即

$$\sum M_O(\mathbf{F}_i) = 0 \quad (2-17)$$

【例 2-8】 如图 2-19(a) 所示, 梁 AB 受一力偶矩 M 的作用, $M=100 \text{ N} \cdot \text{m}$, 梁长 $l=5 \text{ m}$, 梁的自重不计, 求两支座的约束反力。



图 2-19 【例 2-8】图

(a) 力偶 M 作用下的 AB 梁 (b) AB 梁的受力图

【解】 (1) 选取梁 AB 为研究对象。

(2) 对 AB 梁进行受力分析并画出受力图。如图 2-19(b) 所示, AB 梁共受到三个力的作用, 即力偶矩 M 、支座 A 提供的支座反力 $\mathbf{F}_A$ 及 B 支座提供的支座反力 $\mathbf{F}_B$ 。 B 处为可动铰支座, 其反力 $\mathbf{F}_B$ 的作用线沿铅垂方向, 指向假定向上。 A 处为固定铰支座, 其反力 $\mathbf{F}_A$ 的方向本来是不能确定的, 但因梁上只受力偶作用, 故 $\mathbf{F}_A$ 必须与 $\mathbf{F}_B$ 组成一个力偶才能与梁上的力偶 M 平衡, 所以 $\mathbf{F}_A$ 的方向也为沿铅垂方向向下。

(3) 列平衡方程并求解。由式(2-15)得

$$\sum M_i = 0, \quad F_B l - M = 0$$

$$F_A = F_B = \frac{M}{l} = \frac{100}{5} = 20 \text{ N}$$

求得的结果为正值, 说明原假设 $\mathbf{F}_A$ 和 $\mathbf{F}_B$ 的指向就是力的实际指向。

2.3 平面任意力系

2.3.1 平面任意力系的简化

如图 2-20(a) 所示, 设刚体上作用一平面任意力系 $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$, 在刚体上任选一点 O , 称之为简化中心。利用力的平移定理, 将力系中的各力向 O 点平移, 得到一个作用于 O 点的平面汇交力系和一个平面力偶系, 如图 2-20(b) 所示。这两个力系的共同作用效果与原力系

等效。

将平面汇交力系进一步合成为一个作用于 O 点的力 $\mathbf{R}$, 其等于原力系中各力的矢量和, 即满足式(2-6)。 $\mathbf{R}$ 的大小、方向可根据式(2-5)计算。 $\mathbf{R}$ 与平面汇交力系等效, 只表示原力系的一部分作用效果, 称为原力系的主矢。

平面力偶系中各力偶的力偶矩的大小等于原力系中各力对简化中心 O 的力矩, 即 $m_1 = F_1 d_1, m_2 = F_2 d_2, \dots, m_n = F_n d_n$ 。这个力偶系的合成结果是一个合力偶, 合力偶的力偶矩等于各附加力偶的力偶矩的代数和, 即

$$M_O = m_1 + m_2 + \dots + m_n = M_O(\mathbf{F}_1) + M_O(\mathbf{F}_2) + \dots + M_O(\mathbf{F}_n) = \sum M_O(\mathbf{F}_i) \quad (2-18)$$

M_O 与附加力偶系等效, 称为原力系的主矩, 其数值等于原力系中的各力对简化中心的力矩的代数和。

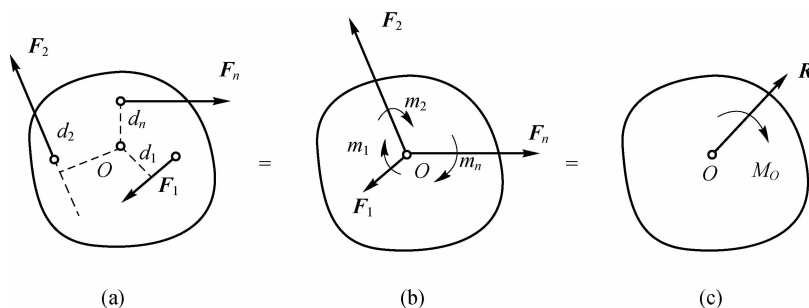


图 2-20 平面任意力系的简化

综上所述, 可以得出以下结论: 平面任意力系向其作用面内任意一点简化, 可得到一个力和一个力偶。该力作用于简化中心, 其大小和方向等于原力系的各力的矢量合; 该力偶的力偶矩等于原力系中各力对简化中心力矩的代数和。

由前面的分析可知, 平面任意力系向其作用面内的任意一点简化, 得到一个主矢 $\mathbf{R}$ 和一个主矩 M_O , 但实际力系的作用情况不同时, 简化的结果也不一样, 具体情况包括以下几种:

(1) $R=0, M_O=0$ 。原力系为一平衡力系, 对物体既不产生移动效应, 也不产生转动效应。在此力系作用下物体处于平衡状态。

(2) $R=0, M_O \neq 0$ 。原力系与一力偶等效, 其力偶矩等于原力系对简化中心的主矩。原力系作用在物体上只产生转动效应。在这种情况下, 简化结果与简化中心的位置无关, 即力系向作用面内的任一点简化, 结果是一样的。

(3) $R \neq 0, M_O = 0$ 。原力系简化为一个力, 主矢 $\mathbf{R}$ 就是原力系的合力, 其大小和方向等于原力系中各分力的矢量和。原力系只对物体产生移动效应。

(4) $R \neq 0, M_O \neq 0$ 。这一结果不是最简结果, 根据力的平移定理, 这个力和力偶还可以向另一点 O' 简化, 如图 2-21 所示, 最后得到一个力 $\mathbf{R}$, 平移距离 d 为

$$d = \frac{M_O}{R}$$

向简化中心的哪一侧简化由主矩的转向决定。

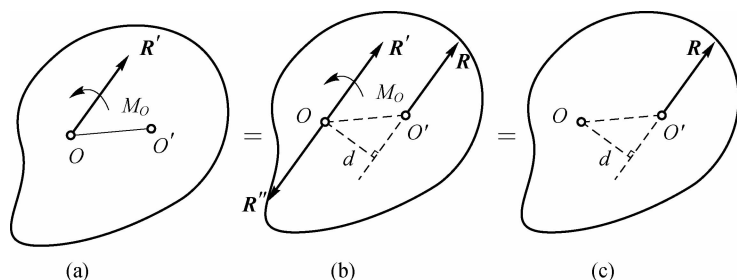


图 2-21 力和力偶的简化

【例 2-9】 图 2-22 所示的水平梁上作用有力及力偶。已知 $F=50\text{ kN}$, $P=10\text{ kN}$, $m=100\text{ kN}\cdot\text{mm}$, 求此力系向 A 点简化的结果。

【解】 此例题是将力系向指定点进行简化, A 点为简化中心, 简化后将得到一个作用于 A 点的力和一个力偶, 即得到原力系的主矢和主矩。

$$R_x = \sum F_{ix} = P \cos 30^\circ = 10 \times 0.866 = 8.66\text{ kN}$$

$$R_y = \sum F_{iy} = F - P \sin 30^\circ = 50 - 10 \times 0.5 = 45\text{ kN}$$

$$\text{主矢的大小: } R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{8.66^2 + 45^2} = 45.82\text{ kN}.$$

$$\text{主矢的方向: } \tan \alpha = \frac{R_y}{R_x} = \frac{45}{8.66} = 5.20, \text{ 即 } \alpha = 79.11^\circ.$$

$$\text{主矩: } M_A = m + Fd_F - Pd_P = 100 + 50 \times 100 - 10 \times (100 + 50) \sin 30^\circ = 4\,350\text{ kN}\cdot\text{mm}.$$

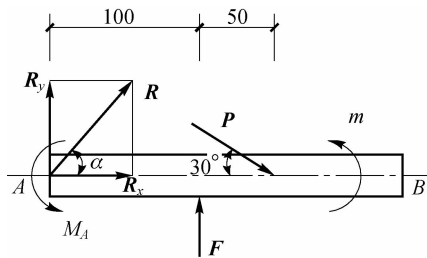


图 2-22 【例 2-9】图

2.3.2 平面任意力系的平衡

1. 平面任意力系的平衡条件

当物体受平面一般力系作用时, 由前面的讨论可知, 平面一般力系向任意一点简化得到两个基本力系: 平面汇交力系和平面力偶系。平面汇交力系合成为一个主矢, 平面力偶系合成为一个主矩。故平面一般力系平衡时, 两个基本力系必须分别平衡。即主矢与主矩都等于零时, 物体就平衡; 反之, 若物体平衡, 力系的主矢和主矩必为零。即

$$\mathbf{F}'_R = 0, \quad M'_O = 0$$

当主矢为零, 即 $\mathbf{F}'_R = 0$ 时, 力系中各力在两个坐标轴上的投影的代数和分别等于零, 即 $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$; 主矩为零时, 各力对任意一点之矩的代数和等于零, 即 $\sum M_O = 0$ 。

因此, 平面任意力系平衡的解析条件为: 力系中所有力在两个坐标轴上的投影的代数和

均等于零,所有力对任一点之矩的代数和等于零。

2. 平面任意力系的平衡方程

平面任意力系的平衡方程有以下三种形式:

(1)基本式。式(2-19)即平面一般力系平衡方程的基本式。前两个方程称为投影方程,后一个方程称为力矩方程,这三个方程是彼此独立的,因此可求解三个未知量。

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum M_O(\mathbf{F}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-19)$$

在应用平面任意力系平衡方程求解未知量时,为了使计算简便,有时可以采用平面任意力系平衡方程的其他两种形式。

(2)二力矩式。在力系作用面内任取两点 A、B 及 x 轴,可以证明平面任意力系的平衡方程可改写成两个力矩方程和一个投影方程的形式,即

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum M_A &= 0 \\ \sum M_B &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-20)$$

式中, x 轴不与 A、B 两点的连线垂直。

(3)三力矩式。在力系作用面内任意取三个不在一直线上的点 A、B、C,则力系的平衡方程可写为三个力矩方程形式,即

$$\left. \begin{aligned} \sum M_A &= 0 \\ \sum M_B &= 0 \\ \sum M_C &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-21)$$

式中,A、B、C 三点不在同一直线上。

3. 平面力系平衡方程的应用

平面力系的平衡问题在工程实际和后续课程中极为常见。平面力系的平衡包括两种情况,即单个物体的平衡和物体系统的平衡。

单个物体的平衡问题是求解物体系统平衡问题的基础,求单个物体平衡问题的步骤如下:

(1)选取研究对象。根据已知量和待求量,选择合适的研究对象。

(2)分析研究对象的受力情况,画出研究对象的受力图。这是解题的关键一步,画出作用在研究对象上的所有力,包括主动力和约束反力。

(3)列出平衡方程。平面任意力系只有三个独立平衡方程。选取适当的坐标系和矩心以使方程中的未知量最少。

(4)解方程求出未知量。在计算结果中,负号表示力在受力图中假设的指向与实际方向相反。在运算中应连同符号一起代入其他方程中继续求解。

(5)校核计算结果。

【例 2-10】 已知水平梁 AB , A 端为固定铰支座, B 端为水平面上的滚动支座, 受力及几何尺寸如图 2-23(a) 所示, 试求 A 、 B 端的约束力。

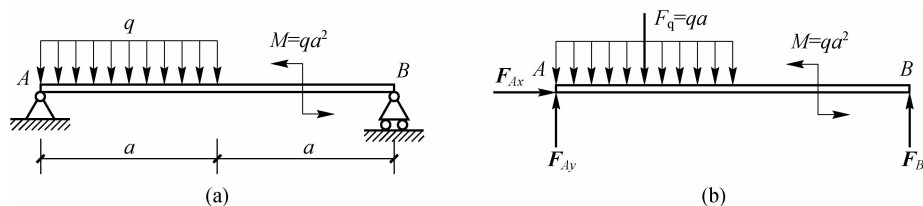


图 2-23 【例 2-10】图

(a) 水平梁 AB (b) AB 梁受力图

【解】 (1) 选取梁 AB 为研究对象。

(2) 对梁 AB 进行受力分析, 画其受力图, 如图 2-23(b) 所示。

作用在梁 AB 上面的主动力为均布荷载 q , 力偶矩 M ; 约束力有固定铰支座 A 端的 F_{Ax} 、 F_{Ay} 两个分力, 滚动支座 B 端的 F_B 。三个支座约束反力 F_{Ax} 、 F_{Ay} 、 F_B 的方向为假设方向。通常把均布荷载看成是一个集中力 F_q , 显然 $F_q = qa$ 且作用在均布荷载的中间位置。

作用在 AB 梁上的五个力组成一个平面任意力系。

(3) 建立坐标系, 列出平面任意力系的三个平衡方程并求解。

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} = 0$$

$$\sum M_A = 0, \quad F_B \times 2a - \frac{1}{2}qa^2 + M = 0$$

$$\text{解得 } F_B = -\frac{qa}{4}。$$

F_B 的计算结果为负值, 说明其实际方向与图中假设的方向相反, 即向下。

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ay} + F_B - qa = 0$$

$$\text{解得 } F_{Ay} = \frac{5qa}{4}。$$

F_{Ay} 的计算结果为正值, 说明其实际方向与假设的方向相同, 即向上。

应强调的是: 对于平面一般力系只能列出三个平衡方程, 除此之外所列出的其他方程都是不独立的, 但它们能起到校核的作用。如本例中可以利用 $\sum M_B = 0$ 校核以上计算结果的准确性。

(4) 校核。

$$\sum M_B = -F_{Ay} \times 2a + qa \times \left(\frac{a}{2} + a\right) + qa^2 = -\frac{5qa^2}{2} + \frac{3qa^2}{2} + qa^2 = 0$$

因此, 计算结果正确无误。

【例 2-11】 钢筋混凝土刚架所受荷载及支承情况如图 2-24(a) 所示。已知 $q = 4 \text{ kN/m}$, $F_{P1} = 10 \text{ kN}$, $M = 2 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $F_{P2} = 20 \text{ kN}$, 试求支座处的反力。

【解】 (1) 选取刚架 $ADCB$ 为研究对象。因已知力和待求力都作用于刚架 $ADCB$ 上, 故选取刚架 $ADCB$ 为研究对象, 不包括两个支座。

(2) 对刚架 $ADCB$ 进行受力分析, 画受力图, 如图 2-24(b) 所示。作用于刚架 $ADCB$ 上的主动力有 F_{P1} 、 F_{P2} 、 M 、 q , 支座反力有 F_{Ax} 、 F_{Ay} 和 F_B , 七个力构成一个平面任意力系。

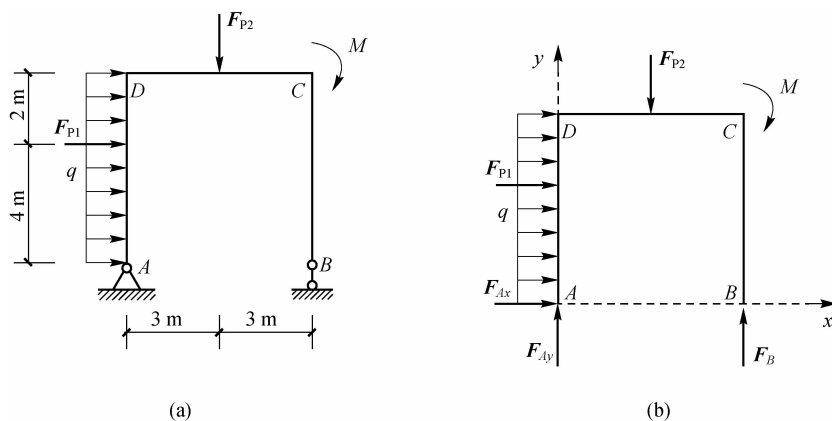


图 2-24 【例 2-11】图
(a)钢筋混凝土刚架 (b)刚架受力图

(3) 建立坐标系, 列出平面任意力系的三个平衡方程并求解。

$$\text{取 } \sum F_x = 0, \quad F_{Ax} + F_{P1} + 6q = 0。$$

$$\text{解得 } F_{Ax} = -F_{P1} - 6q = -10 - 6 \times 4 = -34 \text{ kN}(\leftarrow)。$$

$$\text{取 } \sum M_A = 0, \quad F_B \times 6 - F_{P1} \times 4 - F_{P2} \times 3 - M - 6q \times 3 = 0。$$

$$\text{解得 } F_B = \frac{4F_{P1} + 3F_{P2} + M + 18q}{6} = \frac{4 \times 10 + 3 \times 20 + 2 + 18 \times 4}{6} = 29 \text{ kN}(\uparrow)。$$

$$\text{取 } \sum M_B = 0, \quad -F_{Ay} \times 6 - F_{P1} \times 4 + F_{P2} \times 3 - M - 6q \times 3 = 0。$$

$$\text{解得 } F_{Ay} = \frac{-4F_{P1} + 3F_{P2} - M - 18q}{6} = \frac{-4 \times 10 + 3 \times 20 - 2 - 18 \times 4}{6} = -9 \text{ kN}(\downarrow)。$$

计算结果 F_{Ax} 、 F_{Ay} 均为负值, 说明实际方向与假设方向相反。

(3) 校核。利用 $\sum F_y = 0$ 校核以上计算结果的准确性。

$$\text{因 } F_y = F_{Ay} + F_B - F_{P2} = -9 + 29 - 20 = 0, \text{ 故计算结果正确。}$$

2.3.3 平面平行力系的平衡方程

作用线在同一平面内并且相互平行的力系称为平面平行力系。平面平行力系是平面一般力系的一种特殊情况, 设平面平行力系中各力垂直于 x 轴, 则 $\sum F_x = 0$ 。式(2-20)中的 $\sum F_x = 0$ 不管物体是否平衡都自然满足, 因此, $\sum F_x = 0$ 不是平面平行力系的平衡方程。平面平行力系的平衡方程有以下两种形式:

(1) 第一种形式。

$$\left. \begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ \sum M_O &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-22)$$

式(2-22)中投影轴应与各力平行。

(2) 第二种形式为二力矩式。

$$\left. \begin{aligned} \sum M_A &= 0 \\ \sum M_B &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-23)$$

式(2-23)中 A 、 B 两点连线不与各力的作用线平行。

无论是哪一种平面平行力系,都只有两个独立的平衡方程,只能求解出两个未知数。

2.3.4 物体系统的平衡

物体系统是指若干个物体通过适当的约束相互连接而组成的系统。

当整个物体系统处于平衡状态时,组成该系统的每一个物体必然处于平衡状态。此时可选取整个物体系统作为研究对象,也可将整个物体系统拆开,取系统的局部作为研究对象。

无论如何选取研究对象,在平面任意力系作用下, n 个物体所组成的系统仅能列出 $3n$ 个独立平衡方程,求解 $3n$ 个未知量。若系统受平面汇交力系或平面平行力系作用,独立的平衡方程数目会相应减少。按上述方法求解物体系统的平衡问题理论上并无困难,但在实际问题中,并不要求解全部未知量。如何针对具体问题选择简捷有效的解题途径,是本节重点要解决的问题。

【例 2-12】 图 2-25(a)所示的结构由杆 AB 、 BC 、 CD 、圆轮 O 、绳索和物块 E 组成。圆轮与杆 CD 用铰链连接,圆轮半径 $r = \frac{l}{2}$,物块 E 重量为 P ,其他杆件自重不计。试求固定端 A 处的约束反力。

【解】 (1)取杆 CD 、圆轮、绳索及物块 E 所组成的系统为研究对象,受力如图 2-25(b)所示,列平衡方程。

$$\sum M_D(\mathbf{F}) = 0, \quad F_C \cdot 2l + F_T \cdot 1.5l - P \cdot \frac{l}{2} = 0$$

其中, $F_T = P$, 得 $F_C = -\frac{P}{2}$ 。

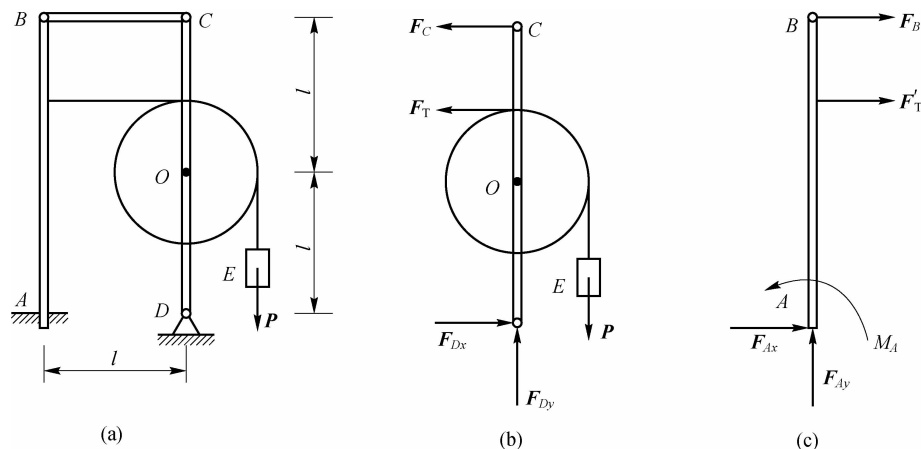


图 2-25 【例 2-12】图

(2)取杆 AB 为研究对象,受力如图 2-25(c)所示,列平衡方程。

$$\sum F_x = 0, \quad F_B + F'_T + F_{Ax} = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ay} = 0$$

$$\sum M_A(F) = 0, \quad M_A - F_B \cdot 2l - F'_T \cdot \frac{3}{2}l = 0$$

其中, $F_B = -F_C$, 得 $F_{Ax} = -\frac{1}{2}P$, $M_A = \frac{1}{2}Pl$ 。

也可先取杆 CD 、圆轮、绳索及物块 E 所组成的系统为研究对象, 再取整体为研究对象, 建议自行完成计算过程。

2.4 摩擦

前面讨论物体的平衡问题时, 均假设物体间的接触面是光滑的, 没有考虑物体间的摩擦。事实上, 摩擦在自然界中是普遍存在的, 而且在许多问题中, 摩擦力对物体的平衡与运动起着主要作用, 如制动器靠摩擦刹车、皮带靠摩擦传递运动; 另一方面, 由于摩擦的存在, 给各种机械带来多余的阻力, 从而消耗了能量, 使机件发热和磨损、降低精度和效率、缩短寿命。因此, 研究摩擦的性质及计算很有必要。根据物体间的相对运动情况, 可把摩擦分为滑动摩擦和滚动摩擦。而滑动摩擦又分为静滑动摩擦和动滑动摩擦。本节仅对滑动摩擦做重点介绍, 滚动摩擦部分请读者自行研究。

2.4.1 滑动摩擦

1. 静滑动摩擦

当两物体在接触面上有相对滑动趋势但仍保持相对静止时, 接触面上就存在阻碍相对滑动的力, 这种阻力称为静滑动摩擦力, 简称静摩擦力。

如图 2-26 所示, 在水平面上放一重为 G 的物体 A , 在其上加一水平推力 P 。当力 P 不太大时, 物体仍处于静止状态, 这是因为沿接触面存在一个阻碍物体滑动的切向力 F , 这个力就是静摩擦力。由物体处于平衡状态可知, 静摩擦力的方向与两物体间的相对滑动趋势的方向相反, 静摩擦力 F 的大小等于水平推力 P 的大小。当水平推力 P 变化时, 只要物体处于静止, 静摩擦力 F 的大小就始终等于水平推力 P 的大小, 并随水平推力的变化而变化, 如图 2-26(a) 所示。但静摩擦力并不能无限制地增加, 当 P 的大小增大到某一临界值时, 物体处于将要滑动而未动的临界状态, 此时, 静摩擦力达到最大值, 如图 2-26(b) 所示。若水平推力继续增大, 静摩擦力却不再增加, 物体开始滑动, 即失去平衡, 如图 2-26(c) 所示。

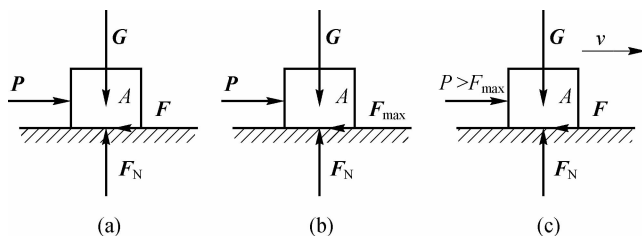


图 2-26 静滑动摩擦

当物体处于将动而未动的临界状态时,其所受的静摩擦力的最大值称为**最大静摩擦力**,记为 $F_{\max}$ 。所以静摩擦力的取值范围为

$$0 \leq F \leq F_{\max} \quad (2-24)$$

总之当物体处于静止状态时,其所受的静摩擦力是一个不确定的值。该值的大小等于引起相对滑动的外力,并随此外力的变化而变化;方向始终与此外力的方向相反。但最大静摩擦力是一个确定的值。其值为

$$F_{\max} = fF_N \quad (2-25)$$

式(2-25)称为**静滑动摩擦定律**,表明**最大静摩擦力的大小与法向反力的大小成正比,方向与两物体间的相对滑动趋势的方向相反**。

式(2-25)中, F_N 为法向反力的大小, f 称为**静摩擦系数**,它的大小与两物体接触面的材料、接触面的光滑程度、温度、湿度等因素有关,可由实验测定。

2. 动滑动摩擦

当两物体在接触表面间有相对滑动时,接触面上存在的阻碍相对滑动的阻力称为**动滑动摩擦力**,简称为**动摩擦力**。

动摩擦力的方向与两物体间的相对滑动的方向相反,动摩擦力的大小 F' 也与法向反力 F_N 的大小成正比,即

$$F' = f'F_N \quad (2-26)$$

式(2-26)称为**动滑动摩擦定律**, f' 称为**动摩擦系数**,它的大小除与两物体接触面的材料、表面的光滑程度、温度、湿度等因素有关,还与两物体间的相对运动速度有关,随速度的增加而减小,一般情况下可认为是常数,其值可由实验测定。

常用材料的静摩擦系数和动摩擦系数可参见下表。

常用材料的滑动摩擦系数

材料名称	静摩擦系数 f		动摩擦系数 f'	
	无润滑	有润滑	无润滑	有润滑
钢-钢	0.15	0.1~0.12	0.15	0.05~0.1
钢-软钢	—	—	0.2	0.1~0.2
钢-铸铁	0.3	—	0.18	0.05~0.15
钢-青铜	0.15	0.1~0.15	0.15	0.1~0.15
软钢-铸铁	0.2	—	0.18	0.05~0.15
软钢-青铜	0.2	—	0.18	0.07~0.15
铸铁-铸铁	—	0.18	0.15	0.07~0.12
铸铁-青铜	—	—	0.15~0.2	0.07~0.15
青铜-青铜	—	0.1	0.2	0.07~0.1
软钢-榉木	0.6	0.12	0.4~0.6	0.1
木材-木材	0.4~0.6	0.1	0.2~0.5	0.07~0.15

(续表)

材料名称	静摩擦系数 f		动摩擦系数 f'	
	无润滑	有润滑	无润滑	有润滑
皮革-铸铁	0.3~0.5	0.15	0.3	0.15
橡皮-铸铁	—	—	0.8	0.5
麻绳-榉木	0.8	—	0.5	—

2.4.2 摩擦角和自锁

1. 摩擦角

如图 2-27 所示,在考虑摩擦时,支撑面对物体施加的约束包括法向反力 F_N 和切向反力 F (摩擦力),两者的合力 F_R 称为全反力。全反力与法向间的夹角用字母 φ 表示, φ 角随着摩擦力 F 的增加而增大,当摩擦力 F 达到最大值,即最大静摩擦力时, φ 角也达到最大值 φ_m , φ_m 称为摩擦角。

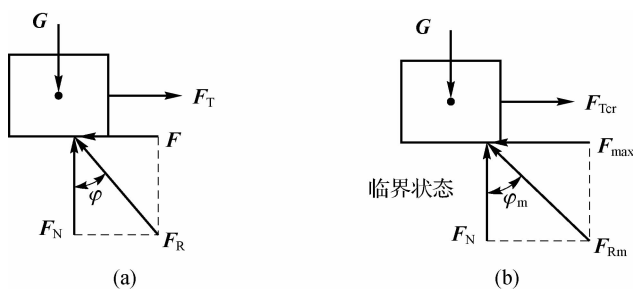


图 2-27 摩擦角

由图 2-27 可知,

$$\tan \varphi_m = \frac{F_{\max}}{F_N} = \frac{fF_N}{F_N} = f \quad (2-27)$$

式(2-27)表明,摩擦角的正切值等于物体间的静摩擦系数,即摩擦角的大小取决于物体接触面间的材料、表面状况等因素。摩擦角与摩擦系数一样,也是表明物体间摩擦性质的物理量。

2. 自锁

如图 2-28 所示的螺杆,螺纹可以看成是绕在一圆柱上的斜面,螺纹的升角 α 就是斜面的倾角。螺母相当于斜面上的滑块,受力如图 2-28(d)所示,加在螺母上的力 F 相当于滑块上的主动力,斜面的全反力为 F_R 。当滑块平衡时, F 和 F_R 必然共线,而 F_R 与法向间的夹角不能超过摩擦角,即 $\varphi \leq \varphi_m$,因此,平衡时,也必然满足 $\alpha \leq \varphi_m$ 。显然,这一条件与主动力的的大小无关。

同理,当物体同时受多个主动力作用时,只要主动力的合力作用线与法向间的夹角满足上述条件,物体就处于静平衡。即作用于物体上的主动力的合力,不论其大小如何,只要其作用线与接触面法线间的夹角小于摩擦角,物体便处于静止状态,这种现象称为自锁。

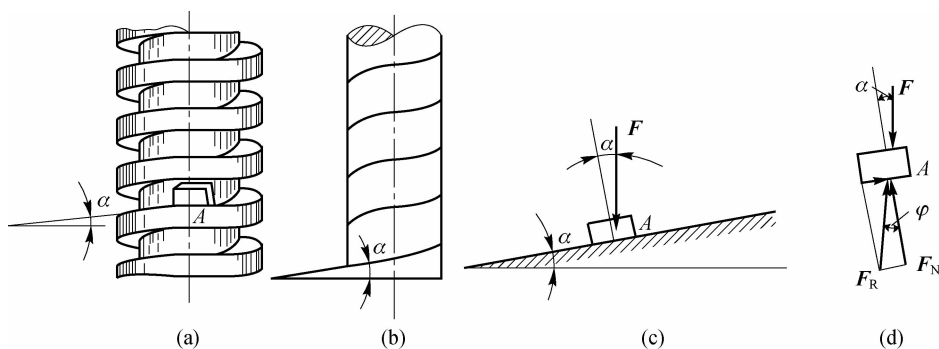


图 2-28 自锁

工程中涉及自锁现象的实例很多。例如,在建筑工地堆放砂、石子时,能够堆起的最大坡角就是松散物质间的摩擦角,用该角可以测算出一定面积的场地能堆放的松散物质的数量;在现浇钢筋混凝土梁的施工过程中,模板需要立柱支撑,并在立柱和模板之间打入楔块以便调节柱高,要使楔块不滑出,其顶角就要小于它与上、下两物体间的摩擦角之和。但在另一些问题中要避免自锁现象的发生。例如,自卸货车的车斗能翻转的角度必须大于摩擦角,以保证货车车斗内的货物倾泻干净;水闸闸门启闭时应避免发生自锁,以防止闸门卡住。

2.4.3 考虑摩擦的平衡问题

由于静摩擦力在非临界状态的取值有一定的范围,因此,在解决含有摩擦的平衡问题时,首先要考虑物体处于什么样的平衡状态,对应的问题大致可分为下列三种情况:

(1)非临界状态的静平衡问题。这类问题的静摩擦力还未达到最大值,是未知的约束反力,其值由平衡方程确定。

(2)临界状态的静平衡问题。当物体处于临界状态的静平衡时,静摩擦力达到最大值,属已知力的范畴,其值根据摩擦定律可求。

(3)平衡范围问题。由于静摩擦力的值在一定的范围内,因此对应的某些主动力和约束反力的值也在一定的范围内。求解这类问题时,可先求出两个相反方向的静平衡临界状态的未知力,然后对结果进行分析,从而得出其平衡范围。

【例 2-13】 如图 2-29 所示,将重为 P 的物块放在倾角为 θ 的斜面上,它与斜面间的摩擦系数为 f ,在水平推力 F_1 的作用下处于静止状态,求水平推力的大小。

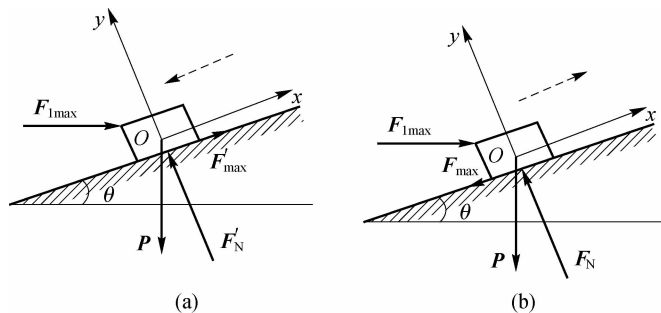


图 2-29 【例 2-13】图

【解】 要使物块处于静止状态,即使其既不能上滑,也不能下滑,就要求推力 F_1 既不能过大也不能过小,其值应在一定的范围内,此属于求平衡范围的问题。求解这类问题,只要求出物块即将上滑和即将下滑的临界状态时的推力即可。

(1) F_1 的最小值 $F_{1\min}$ 。当 F_1 最小时,物块处于即将下滑的临界状态,最大静摩擦力沿斜面向上,受力图如图 2-28(a)所示。列平衡方程,有

$$\sum F_{ix} = 0, \quad F_{1\min} \cos \theta - P \sin \theta + F'_{\max} = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0, \quad F'_N - P \cos \theta - F_{1\min} \sin \theta = 0$$

$$F'_{\max} = f F'_N$$

$$\text{解得 } F_{1\min} = \frac{\tan \theta - f}{1 + f \tan \theta} P。$$

(2) F_1 的最大值 $F_{1\max}$ 。当 F_1 最大时,物块处于即将上滑的临界状态,最大静摩擦力沿斜面向下,如图 2-29(b)所示。列平衡方程,有

$$\sum F_{ix} = 0, \quad F_{1\max} \cos \theta - P \sin \theta - F_{\max} = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0, \quad F'_N - P \cos \theta - F_{1\max} \sin \theta = 0$$

$$F_{\max} = f F'_N$$

$$\text{解得 } F_{1\max} = \frac{\tan \theta + f}{1 - f \tan \theta} P。$$

(3) 综合以上结果可知,物块平衡时, F_1 必须满足 $F_{1\min} \leq F \leq F_{1\max}$, 即

$$\frac{\tan \theta - f}{1 + f \tan \theta} P \leq F \leq \frac{\tan \theta + f}{1 - f \tan \theta} P$$

【例 2-14】 如图 2-30 所示,均质木梯长为 $2a$,重为 G ,其一端放在地面上,另一端放在铅垂墙面上,接触面间的摩擦角为 φ_m ,求木梯平衡时倾角的取值范围。

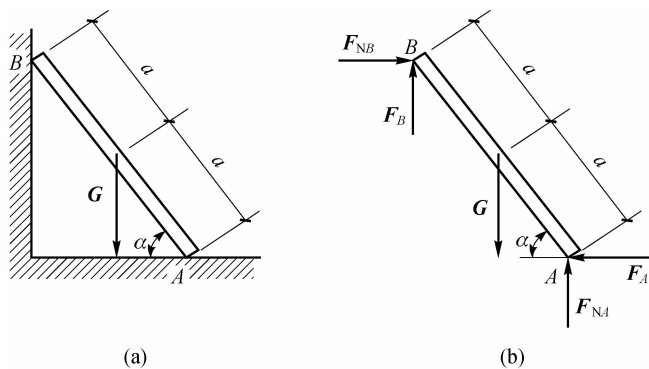


图 2-30 【例 2-14】图

【解】 以木梯为研究对象,画受力图。取木梯平衡的临界状态, A 、 B 处的静摩擦力如图 2-30(b)所示。列平衡方程,有

$$\sum F_{ix} = 0, \quad F_{NB} - F_A = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0, \quad F_{NA} + F_B - G = 0$$

$$\sum M_B(\mathbf{F}) = 0, \quad F_{NA} \times 2a \cos \alpha - F_A \times 2a \sin \alpha - G \times a \cos \alpha = 0$$

由 $F_{\max} = fF_N$, 可知 $F_A = F_{NA} \times \tan \varphi_m$, $F_B = F_{NB} \times \tan \varphi_m$ 。

联立上述方程, 解得 $\tan \alpha = \frac{1 - \tan^2 \varphi_m}{2 \tan \varphi_m} = \tan \left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi_m \right)$, 即 $\alpha = \frac{\pi}{2} - 2\varphi_m$ 。

则木梯倾角的取值范围为 $\frac{\pi}{2} - 2\varphi_m \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ 。

科学家简介

张 维



张维(1913—2001), 北京市人, 著名力学家、教育家, 中国科学院和中国工程院两院院士, 瑞典皇家工程科学院外籍院士。张维在唐山交通大学(今西南交通大学)土木系获工学学士学位, 在伦敦帝国理工学院获工学硕士学位, 在德国柏林高工(柏林工业大学)获工学博士学位, 曾任清华大学教务长、副校长、深圳大学首任校长。他在弹塑性力学、板壳理论及结构工程, 特别是圆环壳、弯管的强度、屈曲、振动及其工程应用、核电站管道系统、快中子增殖堆主钠池的结构完整性与安全评价等方面造诣极深。他创造性地运用解析法、半解析数值法、数值计算、力学试验等方法对具有较强工程背景的结构进行强度、稳定性分析。在教育思想方面, 他强调力学来自工程, 为工程服务, 提倡发挥学生的主动性。他在力学与工程师教育、组织制订力学发展规划、推动国际科技文化交流方面均做出了重要贡献。

思考练习题

- 2-1 平面任意力系向作用面内任一点简化的结果是什么? 若主矩恒为零, 则力系一定为零, 为什么?
- 2-2 平面任意力系的平衡方程有哪几种形式? 应用时有什么限制?
- 2-3 平面任意力系的解题步骤是什么?
- 2-4 什么叫力偶? 力偶的三个要素是什么?
- 2-5 什么是自锁现象? 试举例说明。
- 2-6 对于由 n 个物体组成的物体系统, 是否可列出 $3n$ 个独立的平衡方程?
- 2-7 已知 $F_1 = F_2 = 200 \text{ N}$, $F_3 = 100 \text{ N}$, $F_4 = 120 \text{ N}$, 各力方向如图 2-31 所示, 求:
 - (1) 各力在坐标轴上的投影。
 - (2) 该力系的合力。

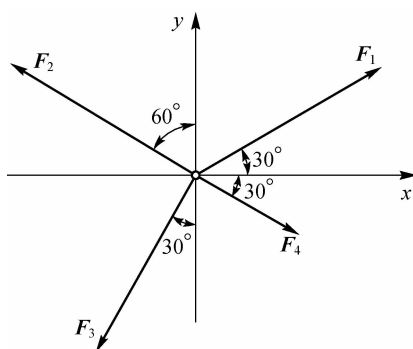


图 2-31 题 2-7 图

2-8 已知 $F_P = 20 \text{ kN}$, A 、 B 、 C 三处铰接, 不计自重, 求图 2-32 中杆件 AB 、 BC 所受的力。

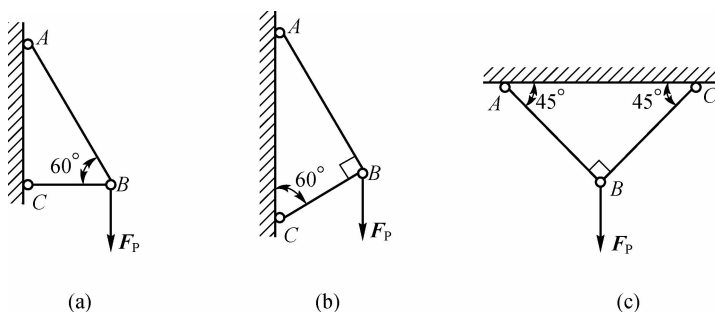


图 2-32 题 2-8 图

2-9 求图 2-33 所示刚架的支座约束反力, 其中, $F_P = 20 \text{ kN}$ 。

2-10 如图 2-34 所示, 挡土墙自重 $G = 400 \text{ kN}$, 土压力 $F = 320 \text{ kN}$, 水压力 $F_1 = 176 \text{ kN}$ 。试求这些力向底边中心 O 简化的结果, 并求合力作用线的位置。

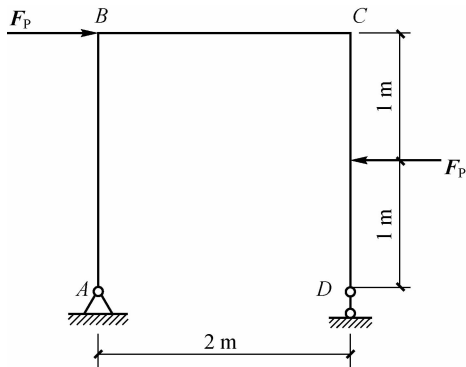


图 2-33 题 2-9 图

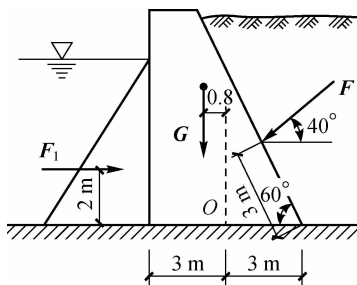


图 2-34 题 2-10 图

2-11 图 2-35 所示的水平梁 AB 受到一个均布荷载和一个力偶的作用。已知均布荷载的集度 $q = 0.2 \text{ kN/m}$, 力偶矩的大小 $m = 1 \text{ kN} \cdot \text{m}$, 长度 $l = 5 \text{ m}$ 。不计梁重, 求支座 A 、 B 的约束反力。

2-12 梁 AB 一端为固定端支座, 另一端为自由端, 这样的梁称为悬臂梁。如图 2-36 所示, 梁承受均布荷载 q 和一集中力 F_P 的作用。已知 $F_P = 10 \text{ kN}$, $q = 2 \text{ kN/m}$, $l = 4 \text{ m}$, $\alpha = 45^\circ$, 梁的自重不计, 求支座 A 的反力。

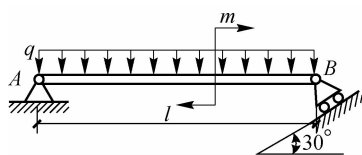


图 2-35 题 2-11 图

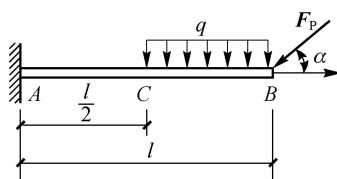


图 2-36 题 2-12 图

2-13 如图 2-37 所示,梁 AB 的 A 端为固定铰支座, B 端为可动铰支座, 梁上受集中力 F 与力偶 M 的作用。已知 $F=10\text{ kN}$, $m=2\text{ kN}\cdot\text{m}$, $a=1\text{ m}$, 试求支座 A 、 B 处的反力。

2-14 如图 2-38 所示,一水平托架承受重 $G=20\text{ kN}$ 的重物, A 、 B 、 C 各处均为铰链连接。各杆的自重不计, 试求托架 A 、 B 两处的约束反力。

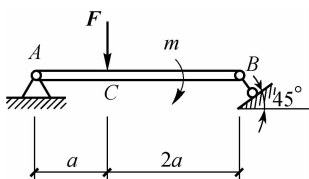


图 2-37 题 2-13 图

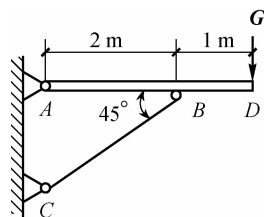


图 2-38 题 2-14 图

2-15 求图 2-39 所示桁架的支座约束反力。

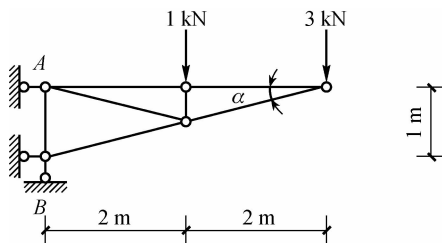


图 2-39 题 2-15 图

2-16 求图 2-40 中组合刚架 A 、 B 、 C 三处的支座反力。

2-17 求图 2-41 中三铰拱的支座约束反力。

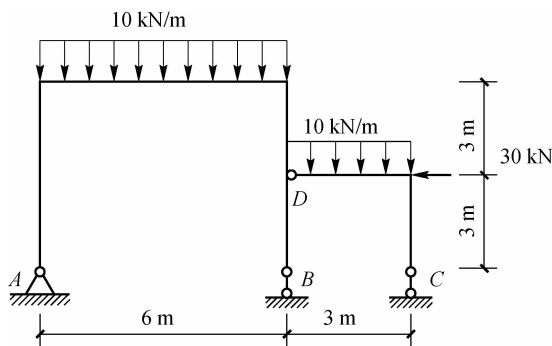


图 2-40 题 2-16 图

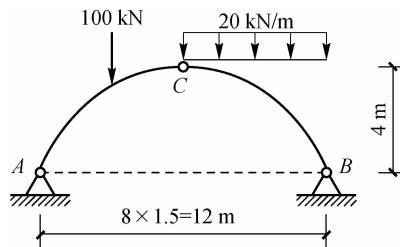


图 2-41 题 2-17 图