

绪 论

0.1 理论力学的研究对象和内容

理论力学是研究物体机械运动一般规律的科学。机械运动是指物体在空间的位置随时间的变化。例如,天体运行,车辆、船舶行驶,机器运转,空气、河水流动等。对各种不同的形态的机械运动的研究衍生出不同的力学分支学科。其中,理论力学是力学学科的基础,也是与机械运动密切联系的各门工程技术学科的基础。理论力学的概念、规律和方法被广泛应用于自然科学中,并发挥着积极的作用。

运动与物质是不可分离的,物质不能脱离运动而存在,运动也不能离开物质而存在。世界上的各种现象都是物质运动的表现形式。根据目前科学所达到的认识,物质运动的基本形式有五种,包括机械运动、物理运动(含分子热运动、电磁运动、基本粒子和原子核运动等)、化学运动、生物运动和社会运动等运动形式。上述运动形式往往相互交错而融合在一起,形成了各种运动的特殊性和规律性。机械运动是自然界和工程中最常见、最简单的一种,在高级和复杂的运动中,往往也会伴随着机械运动。

理论力学研究的内容以伽利略和牛顿总结的基本定律为基础,属于古典力学的范畴。随着近代物理的发展,许多力学现象不能再用古典力学加以解释。二十世纪初产生了研究高速物体运动规律的相对力学和研究微观粒子运动规律的量子力学。虽然在这些新的研究领域古典力学具有一定的局限性,但研究速度远小于光速(约为 3×10^8 m/s)的宏观物体的运动时,古典力学是足够准确的。在尖端科学技术(如火箭、宇宙航空等)领域的研究中,其考察的对象都是宏观物体,运动速度也都远小于光速,仍可采用古典力学的原理处理相关的力学问题。同时,在古典力学基础上诞生的各种近代力学也正在迅速发展。因此,理论力学作为一门基础学科,具有非常重要的作用,并显现出勃勃生机。

理论力学的研究内容通常分为静力学、运动学和动力学三个部分:

- (1)静力学主要研究物体的受力分析、力系的简化及物体在力系作用下的平衡规律。
- (2)运动学仅从几何的角度研究物体的运动(如轨迹、速度和加速度等),而不考虑引起物体运动的原因。
- (3)动力学研究作用于物体上的力与运动变化之间的关系。

0.2 理论力学的研究方法

理论力学研究的问题广泛涉及工业和生产实际。观察与实践是理论力学发展的基础,抽象化和数学演绎是形成理论力学的概念与理论系统的主要方法。通过观察生活和生产实

■ 绪 论

实践中的各种现象,进行多次实验,经过分析、归纳,总结出力学最基本的规律,然后再回到实践中验证理论的正确性,并在更高的理论水平上指导实践,在这个过程中研究新的材料、获得新的认识,再进一步完善和发展理论力学。

数学与力学有着极其密切的关系,数学不仅是推理的工具,也是计算的工具。力学现象之间的关系总是通过数量表示。因此,计算机技术对力学的应用和发展有着巨大的推动作用。现代电子计算机的飞速发展,为计算技术在工程技术问题中的应用开辟了广阔的前景,大大促进了数学在力学中的应用。

处理力学问题的一般途径:首先,对所研究的问题建立抽象的力学模型,该模型既要能反映问题的矛盾主体,又要能便于求解;其次,按力学的基本原理和物理量间的数学关系建立方程;再次,运用一定的数学工具计算求解;最后,根据具体问题对所求解进行分析讨论,甚至确定取舍。其中,建立力学模型的抽象化过程是非常重要的步骤,它包含了对所研究问题和对象的缜密观察与了解,抓住问题的主要因素,忽略问题的次要因素,用理想模型来反映客观事物的本质。当然,力学模型的建立也并非唯一、绝对的。同一事物的相同问题,在不同情况下体现出其本质的不同方面,也就可能建立起不同的力学模型。

0.3 理论力学的课程任务

理论力学和现代科学技术有着极为广泛的联系,现代生产和科学技术的飞速发展对力学提出了更多、更高的要求。例如,人造卫星的发射和航天飞机的研制,涉及火箭的轨道计算、制导及卫星姿态控制等问题。工业生产过程自动化的发展和机器人的研发,要求在控制理论和多刚体系统设计理论方面有相应的发展等,这些问题的研究都涉及理论力学的基本概念。随着现代科学技术的进一步发展,理论力学已渗透到其他科学领域,形成了许多交叉学科和边缘学科。因此,理论力学不仅是一门基础科学,也是现代工程技术的重要理论基础之一,必须掌握理论力学的基础知识,才有可能研究不断出现的新理论和新技术。

此外,理论力学的分析和研究方法在科学研究中具有一定的代表性,有助于培养学生的辩证唯物主义世界观及分析问题、解决问题的能力。学生在学习理论力学课程的过程中,需要了解和掌握机械运动的基本规律与研究方法,逐步发展形成科学的逻辑思维能力,对实际问题进行抽象简化的理论分析能力,为今后进一步学习、研究奠定良好的基础。

0.4 理论力学的学习目的

理论力学是现代工程技术的基础,它是工科院校各专业的教学计划中的一门重要的技术基础课。本课程系统阐述质点、质点系、刚体和刚体系统的运动基本规律。这些理论知识为学习一系列后续课程,如材料力学、结构力学、机械原理、机械零件、振动力学、流体力学和弹塑性力学等专业课程提供重要的理论基础。

第一篇

静力学

引 言

1. 静力学基本定义

静力学研究物体在力系作用下的平衡规律。

力是物体间相互的机械作用,这种作用使物体运动状态发生变化,或使物体形状发生改变。前者称为力的运动效应(力的外效应),后者称为力的变形效应(力的内效应)。理论力学主要研究力的运动效应。

力系是指作用在物体上的若干个力。工程中常见的力系,按其作用线所在的位置可分为平面力系和空间力系;按其作用线的相互关系可分为共线力系、平行力系、汇交力系和任意力系。

平衡是指物体相对于惯性参考系保持静止、匀速直线运动或绕轴匀速转动。它是机械运动的特殊形式。平衡是相对的,工程实际中通常把固连于地球的参考系作为惯性参考系来研究物体相对于地球的平衡问题,其分析计算的结果具有足够的精确度,也能较好地与实际情况相吻合。

刚体是指在力的作用下,形状不发生改变或其内部任意两点之间的距离始终保持不变的物体。刚体是理想化的抽象模型。事实上,任何物体受力后或多或少都会发生变形,并不存在绝对的刚体。在运动中,变形极小或虽有变形但其对物体整体运动影响较小时,可忽略其变形将物体抽象为刚体,这对研究结果不但没有显著影响,而且可使问题得以简化。当然,将物体抽象为刚体是有条件的,这与所研究问题的性质有关。当物体的变形成为所研究问题的主要方面时,则不能抽象为刚体,应按变形体进行处理。

2. 静力学研究的三类问题

1) 物体的受力分析

物体的受力分析是分析物体或物体系的受力,以及每个力的作用位置 and 方向。

2) 力系的等效替换或简化

作用于物体上的力系可以用另一个与它作用效果相同的力系来代替,这两个力系互为等效力系。用一个简单力系等效地替换一个复杂力系,则称为力系简化。如果一个力系与一个力等效,则此力就是该力系的合力,而该力系中的各个力都称为此力的分力。

3) 力系的平衡条件及其应用

力系的平衡条件是指研究物体处于平衡时,作用于物体上的力系所应满足的条件。

物体的受力分析是解决力系问题的关键,研究力系等效替换是为了便于体现力系对物体作用的总效应,也为推导出各种力系的平衡条件做准备,更为动力学奠定了基础。利用平衡条件求解物体或物体系的平衡则是静力学的核心问题。

■ 第一篇 静 力 学

静力学在工程实际中有着广泛的应用,利用平衡条件求解平衡问题所得的结果是设计结构、构件和机械零部件的计算依据。静力学中物体的受力分析方法和力系的简化理论将直接应用于动力学问题当中。

第 1 章

静力学基础

静力学的基本概念、公理及物体的受力分析是研究静力学的基础。本章主要介绍力和力系的基本概念及静力学公理,并阐述工程中常见的约束和约束力。还将介绍物体的受力分析及受力图,受力分析是解决力学问题的重要环节。

1.1 力和力系的基本概念

1.1.1 力的概念

力主要可分为以下几种类型:按分布状况分为体积分布力、面积分布力、线性分布力和集中力;按相互作用的物体间是否接触分为接触力和场力;按载荷是否发生变化或显著变化分为静载荷(不随时间发生变化或随时间发生缓慢变化的载荷)和动载荷(随时间发生显著变化的载荷)。

实践证明,力对物体的作用效果取决于力的三要素:力的大小、力的方向和力的作用点。其中任何一个要素发生变化,力的作用效果也随之发生变化。

力是矢量,具有大小和方向,作用在物体上的力用矢量来表示。力的示意图如图 1-1 所示。矢量的起点 A 表示力的作用点;矢量的长度 AB 按选定的比例尺表示力的大小;矢量的方向表示力作用的方向(箭头所指方向)。

在国际单位制中,力的单位是牛(N)或千牛(kN)。

在本书中,凡是矢量都用黑斜体字母表示,如 $\boldsymbol{F}$;而矢量的大小则用白斜体的同一字母表示,如 F 。

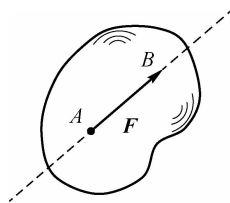


图 1-1

1.1.2 力系的概念

当力的作用线分布在同一平面时,该力系称为平面力系;力的作用线为空间分布时,该力系称为空间力系;力的作用线汇交于同一点时,该力系称为平面汇交力系或空间汇交力系;力的作用线相互平行时,该力系称为平面平行力系或空间平行力系;力的作用线既不平行又不相交,该力系称为平面任意力系或空间任意力系。若作用于物体上的力系不改变物体的运动状态,该力系称为平衡力系。

1.2 静力学公理

公理是人们在生活和生产实践中长期积累的经验总结,又经过实践反复检验,被确认是符合客观实际的最普遍、最一般的规律。静力学基本公理反映的规律虽然简单,但它是建立静力学理论的基础。

公理一 二力平衡条件

刚体受两个力作用而处于平衡状态的充分必要条件是:这两个力大小相等,方向相反,且作用在同一条直线上。

此二力所构成的力系是最简单的力系。如图 1-2 所示,其平衡条件为:

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 \quad (1-1)$$

公理二 力的平行四边形法则

作用在物体同一点上的两个力,可以合成为一个合力。合力的作用点也在该点,合力的大小和方向,由以这两个力为邻边的平行四边形的对角线确定,这就是力的平行四边形法则,如图 1-3(a)所示。或者说,合力矢等于这两个力矢的矢量和,即

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \quad (1-2)$$

简便起见,亦可作力三角形,如图 1-3(b)或图 1-3(c)所示,力三角形的两个边分别为 $\mathbf{F}_1$ 和 $\mathbf{F}_2$,第三边 $\mathbf{F}_R$ 即为合力矢量,这种求合力的方法称为力的三角形法则。应注意,力三角形只表示力的大小和方向,而不表示力的作用点或作用线,合力作用点仍在原来的汇交点 A 上。

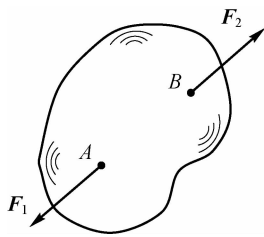


图 1-2

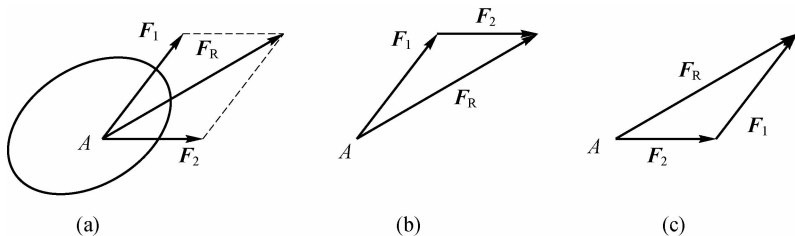


图 1-3

更进一步,将力三角形推广到力多边形,可得力的多边形法则:将平面汇交力系中的各力矢依次首尾相连,构成一开口力多边形,从第一个矢量的起点向最后一个矢量的终点作封闭边矢量,即为合力矢量。

矢序规则:矢量合成与各个力矢的先后顺序无关,改变顺序只会使力多边形的形状发生变化,合力矢量大小、方向均不发生变化。

力的平行四边形法则、力的三角形法则和力的多边形法则表明了最简单力系简化的规律,是复杂力系简化的依据。

公理三 加减平衡力系原理

在已知力系上加上或减去任意的平衡力系,并不改变原力系对刚体的作用效果。

此公理是研究力系等效替换与简化的重要依据。但必须注意:此公理仅适用于刚体而

不适用于变形体。

由上述公理可导出如下推论：

推论 1 力的可传性

作用于刚体上某点的力，可沿着它的作用线滑移到刚体内任意一点上，并不改变该力对刚体的作用，其示意图如图 1-4 所示。

应用力的可传性时需注意：

(1) 力的可传性只能在一个刚体上进行，不可将力从一个刚体传到另一个刚体上。

(2) 力的可传性仅适用于刚体，不适用于刚体系。

(3) 当研究的物体考虑变形(即变形体)时，力的可传性不适用。

力是**定位矢量**，作用点至关重要，但对于刚体而言，力的作用点已不再是决定力的作用效应的要素，它已为作用线所代替。因此，作用于刚体上的力的三要素是力的大小、方向和作用线，即为**滑动矢量**。

推论 2 三力平衡汇交定理

刚体在三个力作用下处于平衡，若其中两个力的作用线汇交于一点，则此三力必在同一平面内，且第三个力的作用线通过汇交点或共面平行。

学生可参考图 1-5 提示自行完成证明过程。此外，“三力共面平行”是“三力不平行必共面汇交于一点”的特例，即在无穷远处汇交，故无须单独证明。

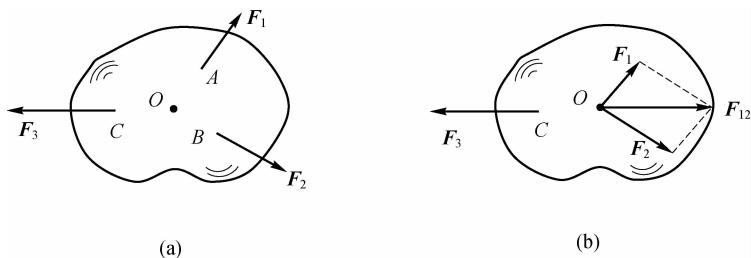


图 1-5

三力平衡条件给出了三个不平行的共面力构成平衡力系的必要条件，即这三个力构成一平面汇交力系。当刚体受不平行的三力作用而处于平衡时，常利用此关系确定未知力的作用线位置。

公理四 作用和反作用定律

作用力和反作用力总是同时存在的，此二力大小相等，方向相反，沿着同一直线，分别作用在两个相互作用的物体上。若用 $\mathbf{F}$ 表示作用力，用 $\mathbf{F}'$ 表示反作用力，则

$$\mathbf{F} = -\mathbf{F}'$$

这一公理概括了物体间相互作用力的关系，表明作用力和反作用力总是成对出现的。由于作用力和反作用力分别作用在两个物体上，因此不能视为平衡力系。这是物体受力分析必须遵循的原则，该关系也同样适用于力偶。

公理五 刚化原理

变形体在某一力系作用下处于平衡，如将此变形体刚化为刚体，其平衡状态保持不变。

刚化原理提供了把变形体抽象为刚体模型的条件。绳索在两个等值、反向、共线的拉力作用下处于平衡,如将绳索刚化为刚体,则平衡状态保持不变;而绳索在两个等值、反向、共线的压力作用下不能平衡,这时绳索就不能刚化为刚体。由此可见,刚体的平衡条件是变形体平衡的必要非充分条件。在刚体静力学的基础上考虑变形体的特征,可进一步研究变形体的平衡问题。

1.3 常见约束及约束力

1.3.1 约束的基本概念

力学中的物体可分为两类:一类是**自由体**,它们在空间的位移不受任何限制,如空中飞行的飞机、炮弹和火箭等;另一类是**非自由体**,它们在空间的位移受到一定的限制,如重物受绳索限制不能自由下落,门、窗只能绕合页转动等。工程实际中的杆件或机械零部件都是非自由体。对非自由体的某些位移起限制作用的周围物体称为约束。例如,绳子是电灯的约束,合页是门、窗的约束。

约束对物体的作用实际上就是力,这种力称为约束力。除约束力外,作用于物体上的重力、风力、土压力、电磁力等,这些力一般都是给定的,称为**主动力**。

通常约束力是未知的,约束力的大小、方向不能预先确定,只能由约束的性质和主动力状况来决定,因此约束力的确定成为力学分析的重要任务之一。

约束力方向(作用线位置)确定准则:约束力的方向必与该约束所能阻碍的位移方向相反。在静力学问题中,约束力和物体受到的主动力组成平衡力系,可用平衡条件求解约束力的大小。

1.3.2 工程中常见的约束类型及约束力方向

1. 柔索约束

柔索约束由软绳、链条或胶带等构成。

如图 1-6(a)所示,绳索 AB 一端固定于天棚,另一端悬挂一重物。由于柔软的绳索只能受拉力(忽略绳索重力),如图 1-6(b)所示,即只能限制物体在柔索受拉方向的移动,而不能阻止其他方向的运动。因此,柔索的约束反力也只能是拉力,如图 1-6(c)所示。

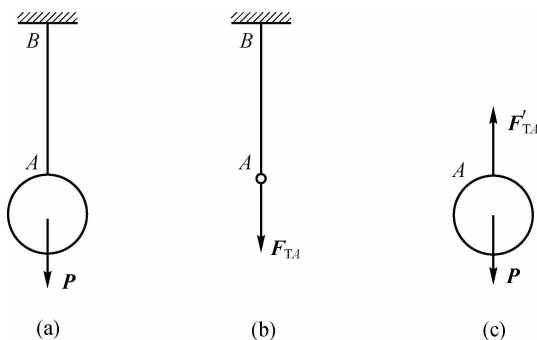


图 1-6

柔索的约束反力通过接触点,沿着柔索而背离物体。

2. 光滑接触面约束

当物体与约束间的接触面视为理想的、摩擦可忽略不计时,此时的约束可简化为光滑接触面约束。此时,不论接触面是平面或是曲面,都不能限制物体沿约束表面切线方向的位移,只能限制物体沿着接触面法线方向约束内部的位移。因此,光滑接触面对物体的约束力通过接触点,方向沿接触面的公法线指向被约束的物体,该约束力称为法向约束力,通常用 F_N 表示。图 1-7 所示的支持物体的固定面、啮合齿轮的齿面都可视为光滑接触面,它们的约束力分别为 F_{NA} 和 F_{NB} 。

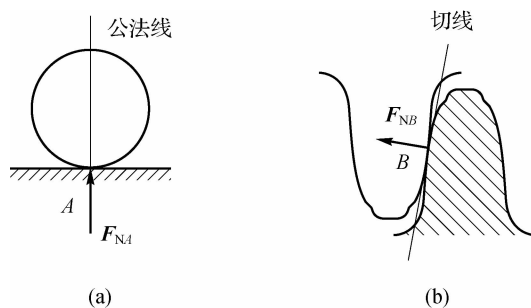


图 1-7

3. 光滑铰链约束

光滑铰链约束是工程中最常见的,主要包括向心轴承、圆柱铰链和固定铰链支座等。

1) 向心轴承(径向轴承)

向心轴承的结构如图 1-8(a)所示,轴可在孔内任意转动,也可沿孔的中心线移动,但轴承阻碍着沿径向向外的位移。当轴和轴承在某点 A 光滑接触时,轴承对轴的约束力作用在接触点 A 上,且沿公法线指向轴心,如图 1-8(b)所示。

实际上,接触点的位置与作用在轴上的主动力有关,主动力尚未确定,约束力的方向很难确定。向心轴承约束力的作用线必垂直于轴线并通过轴心,因此,通常用通过轴心的两个大小未知的正交分力来表示,如图 1-8(c)所示, F_{Ax} 、 F_{Ay} 的指向暂时任意假定。

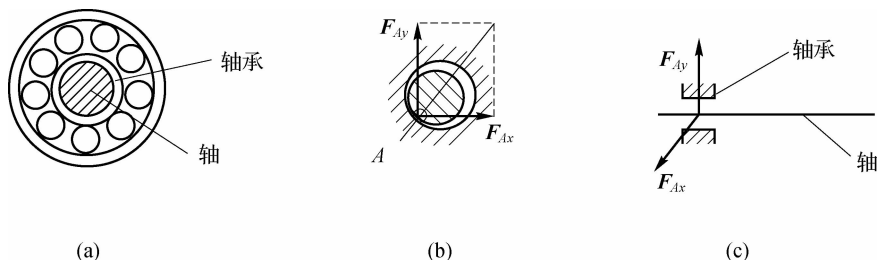


图 1-8

2) 圆柱铰链和固定铰链支座

圆柱铰链简称铰链,它是用一圆柱形销钉将两个或多个构件铰接在一起的。即在构件的连接处各加工一直径相同的圆孔,用销钉穿起来,如图 1-9(a)所示。铰链是工程结构和机

第一篇 静力学

机械设备中常用的连接构件或零部件,其简图如图 1-9(b)所示。若相互接触的两圆柱面是光滑的,则销钉只能限制被约束构件在垂直于销钉轴线平面内的径向运动,不能限制被约束构件绕圆孔中心的转动。因此,约束力沿圆柱面接触点的公法线通过铰链中心。当然,随着被连接部件受力情况的不同,接触点的位置也会变化。由于接触点位置无法确定,其约束力的方向也不能预先确定,通常用两个作用于圆孔中心的正交分力 F_{Ax} 、 F_{Ay} 来表示,如图 1-9(c)所示。 F_{Ax} 、 F_{Ay} 的指向暂时任意假定。

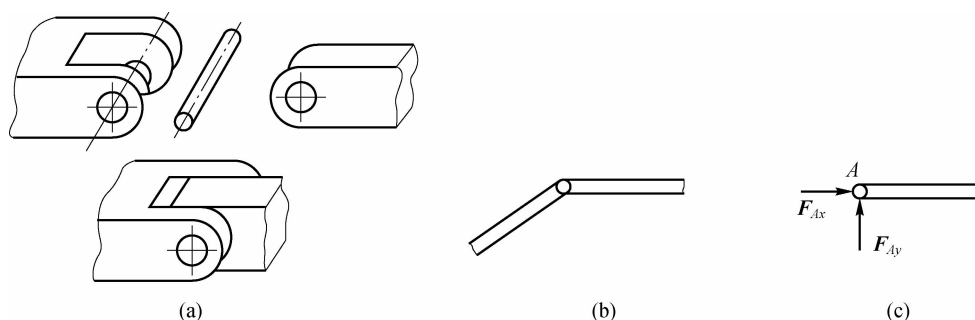


图 1-9

工程中常将支座用螺栓与基础固连,如将物体用光滑圆柱销钉与该支座连接,就构成了固定铰链支座,简称固定铰支,其基本结构如图 1-10(a)所示。固定铰支的约束特性与铰链相同,其简图与约束力表示方法分别如图 1-10(b)、图 1-10(c)所示。

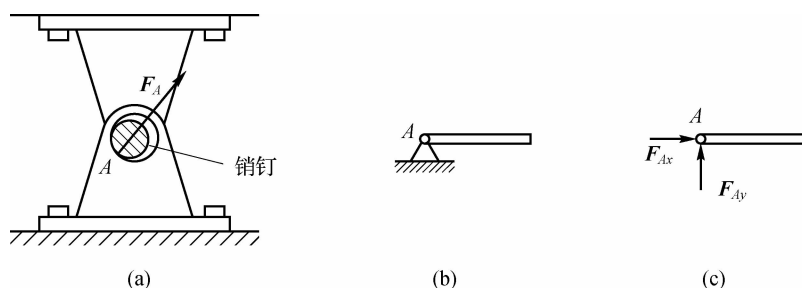


图 1-10

4. 二力构件

不考虑自重,仅在两个铰点处受力而处于平衡状态的构件称为二力构件。

由二力平衡条件可知,当铰杆处于平衡状态时,其所受的两个力必定是大小相等、方向相反,作用在链杆两个铰链中心的连线上。

5. 其他约束

1) 滚动铰支座

滚动铰支座是在固定铰链支座与光滑支承面之间装几个辊轴而构成的,称为滚动(可动)铰支座或辊轴支座,其结构及简图如图 1-11(a)、图 1-11(b)所示。该支座的约束性质与光滑面约束相同,其约束力垂直于支承面且通过铰链中心。通常用 F 表示其法向约束力,如图 1-11(c)所示。

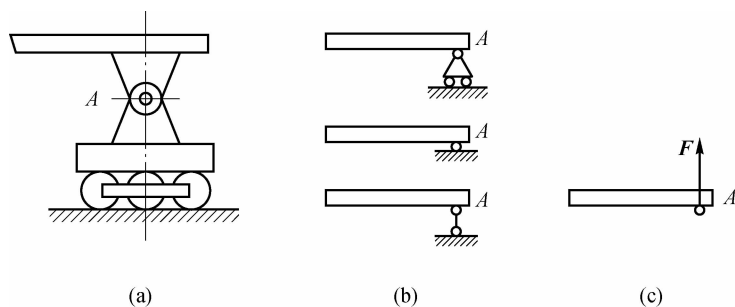


图 1-11

2) 止推轴承

止推轴承与向心轴承的差异在于,它除能限制轴的径向位移外,还能限制轴沿轴向一侧的位移。因此,它比向心轴承多一个沿轴向的约束,即约束力有三个 F_{Ax} 、 F_{Ay} 、 F_{Az} 正交分力,其结构简图及约束力如图 1-12 所示。

3) 球铰链

通过圆球和球壳将两个构件连接在一起的约束称为球铰链。它使构件的球心不能有任何移动,但构件可绕球心转动。若不计摩擦,球铰链与圆柱铰链分析相似,其约束力为通过球心但方向不能预先确定的一个空间法向约束力,可用三个正交分力 F_{Ax} 、 F_{Ay} 、 F_{Az} 表示,其简图及约束力如图 1-13 所示。

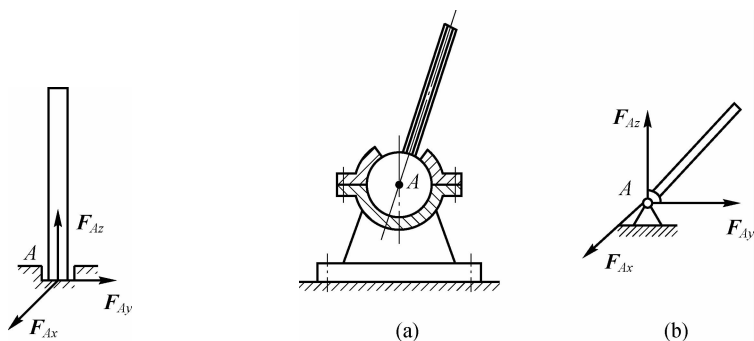


图 1-12

图 1-13

1.4 物体的受力和受力图

在工程实际中,为求解未知约束力,需根据已知力,应用平衡条件求解。因此,首先要分析问题的性质及待求量,充分利用已知条件确定研究对象。研究对象可以是单个物体、系统中的单个构件、部分系统或整体;然后对其进行受力分析,确定构件受几个力,每个力的作用位置和方向。这种分析过程称为物体的受力分析。

物体受力分析的步骤

- (1)画隔离体(研究对象):将研究对象单独分离出来,画出其简图。
- (2)画主动力:主动力作用的形式和位置不能改变。
- (3)画约束力:主要依照约束性质确定约束力,合理利用二力构件、三力平衡汇交定理及

第一篇 静力学

作用和反作用定律。

表示物体受力的简明图形称为**受力图**。画物体受力图是解决静力学问题的一个重要环节。

例 1-1 重力为 P 的梯子 AB , 搁在水平面并靠在墙体上, 在 E 点用水平绳索 EF 与墙面相连, 如图 1-14(a) 所示。不计各处摩擦, 试画出梯子 AB 的受力图。

解 (1) 选取梯子 AB 为研究对象。将梯子 AB 从周围的物体(约束)中分离出来, 单独画出其简图。

(2) 画主动力。梯子受主动力 P 。

(3) 画约束力。约束力需依据约束的性质画出。选梯子为隔离体时, 需在 A 、 D 、 E 三处分别解除地面、墙体、绳索的约束。考虑 A 、 D 两处均为光滑接触面约束, 地面、墙体作用于梯子的约束力分别为 F_{NA} 、 F_{ND} , 沿各自接触面公法线方向指向梯子。绳索作用于梯子的拉力 F_{TE} 沿着绳索 EF 方向背离梯子。梯子 AB 的受力图如图 1-14(b) 所示。

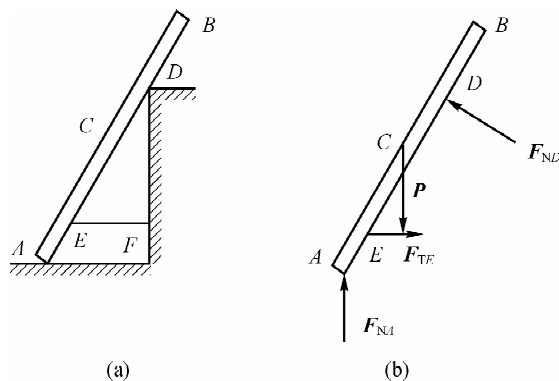


图 1-14

例 1-2 平面简单桁架由杆件 AB 和 CD 组成, B 端悬挂重量为 P 的物块, 如图 1-15 所示。不计杆件自重和摩擦, 试作杆件 AB 的受力分析图。

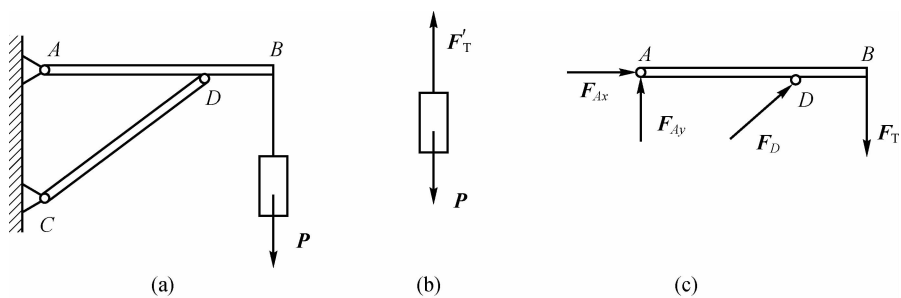


图 1-15

解 (1) 选取杆件 AB 为研究对象。杆件 AB 上没有主动力, 只画约束力即可。

(2) 画约束力。 A 处为固定铰支座, 其约束力可用两个大小未知的正交分力 F_{Ax} 、 F_{Ay} 表示, 此二力的指向是假定的。 D 点为光滑圆柱铰链连接, 而杆件 CD 为二力杆件, 铰点处约束反力的作用线沿点 C 和点 D 连线, 约束反力 F_D 的指向可任意假定。 B 点为柔索约束, 约束反力为绳索的拉力 F_T 。重物的受力如图 1-15(b) 所示, 根据二力平衡条件有: $F'_T = -P$ 。 F_T 为 F'_T 的反作用力, 故 $F_T = -F'_T = P$, 杆件 AB 的受力分析图如图 1-15(c) 所示。

例 1-3 如图 1-16(a)所示三铰拱桥,由两拱 AC 和 BC 铰接而成。不计自重和摩擦,在拱 AC 上作用载荷 F 。试分别画出拱 AC 和 BC 的受力图。

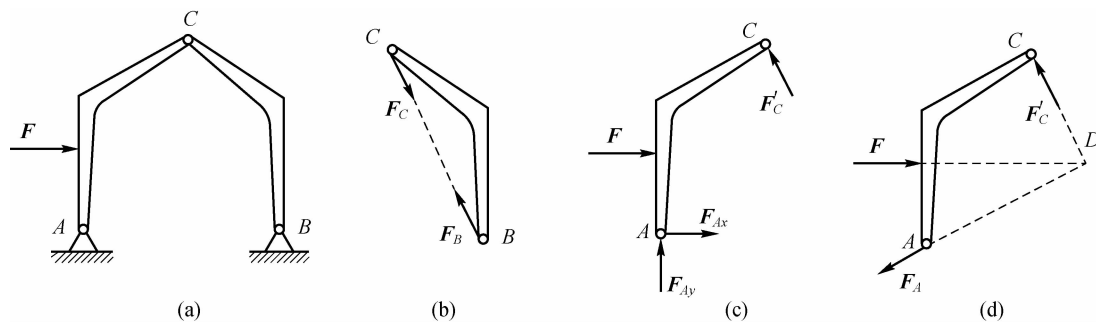


图 1-16

解 (1) 选取拱 BC 为研究对象, 由于不计拱 BC 自重, 且只在 B、C 处分别受铰链约束, 故拱 BC 为二力构件, 在铰链中心 B、C 处分别受 F_B 、 F_C 两个力的作用, 此二力的方向沿 B、C 两点连线, 其受力图如图 1-16(b)所示, 且 $F_B = -F_C$ 。

(2) 选取拱 AC 为研究对象, 拱 AC 所受主动力为 F , 拱 AC 在铰链 C 处受到拱 BC 给它的约束力 F'_C , 根据作用和反作用定律有 $F_C = -F'_C$ 。拱 AC 在 A 处受固定铰支座的约束力 F_A 作用, 可用两个大小未知的正交分力 F_{Ax} 、 F_{Ay} 代替。拱 AC 的受力图如图 1-16(c)所示。

另外, 由于拱 AC 在 F 、 F'_C 、 F_A 三个力共同作用下处于平衡状态, 故可依据三力平衡汇交定理, 确定铰链 A 处的约束力 F_A 的方向。点 D 为 F 、 F'_C 作用线的交点, 当拱 AC 平衡时, 约束力 F_A 的作用线必通过点 D, 拱 AC 的受力图也可画成图 1-16(d)所示。 F_A 的方向暂且假定, 如图 1-16(d)所示, 计算时可由平衡条件确定。

请思考: 若拱 AC 和 BC 都计入自重时, 各受力图有何不同? 若取三铰拱整体为研究对象, 受力图又该如何画?

例 1-4 提升重物的滑轮如图 1-17(a)所示, 重物重为 P , 绳端拉力为 F , 动滑轮 A 和定滑轮 B 自重不计。试画出整个系统及两个滑轮的受力图。

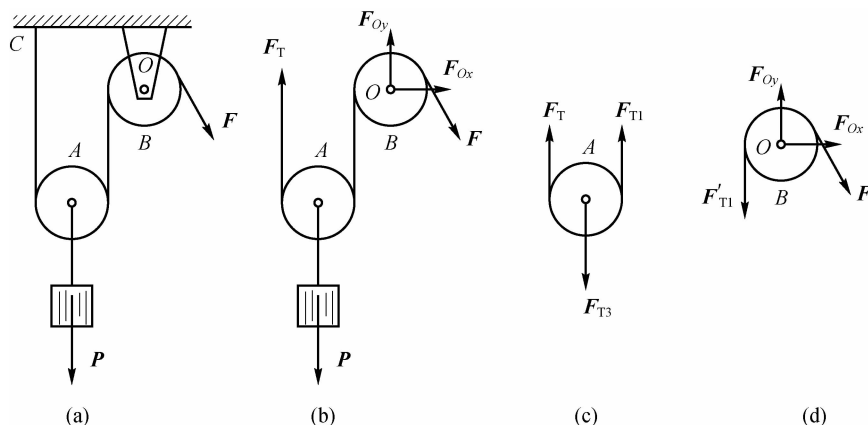


图 1-17

解 (1)取整个系统为研究对象。系统所受主动力为 P 和力为 F 。画受力图时,假想 C 处切断绳索约束,代之以拉力 F_T ,假想 O 处拆除销钉,代之以两个正交分力 F_{Ox} 和 F_{Oy} ,图 1-17(b)所示即为系统的受力图。

(2)取动滑轮 A 为研究对象。滑轮 A 通过三根绳子与外界相联系,画受力图时,假想切断绳子,分别用 F_T 、 F_{T1} 、 F_{T3} 表示三根绳子上的拉力。图 1-17(c)所示为 A 轮受力图。

(3)取定滑轮 B 为研究对象。 B 轮上作用有主动力 F ,画受力图时,假想切断左端绳子,受拉力 F_{T1} , O 处受固定铰支座约束力 F_{Ox} 和 F_{Oy} ,图 1-17(d)所示为 B 轮受力图。

F_{T1} 和 F'_{T1} 两个力互为作用力与反作用力, F_{T1} 是 A 轮的外力, F'_{T1} 是 B 轮的外力,但若取整个系统为研究对象时, F_{T1} 和 F'_{T1} 是系统的内力。

自行分析力 F_{T3} 和力 P 的反作用力。

例 1-5 如图 1-18(a)所示系统中,重物 E 重为 P ,其他各构件自重不计。将杆 AB 、绳 DE 、滑轮 O 及重物 E 所组成的系统作为研究对象,画出其受力图。

解 取杆 AB 、绳 DE 、滑轮 O 及重物 E 所组成的系统作为研究对象(分离体)。隔离体所受主动力为重物 E 的重力 P ;所受约束反力有固定铰支座 A 的约束反力 F_{Ax} 和 F_{Ay} ,铰链 B 的约束反力 F_{Bx} 和 F_{By} ,以上四力的指向均可任意假定;隔离体还受 BC 杆对绳的拉力 F_T 。滑轮 O 与杆 AB 的相互作用力、绳与重物 E 的相互作用力均为内力,不应画出。系统的受力图如图 1-18(b)所示。

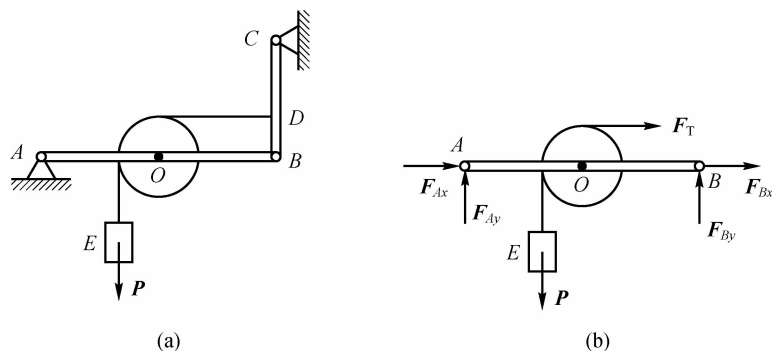


图 1-18

正确画出物体受力图是分析、解决力学问题的基础。画受力图时必须注意以下几点:

(1)明确研究对象。根据解题需要,可取单个物体为研究对象,也可取几个物体组成的系统为研究对象。不同研究对象的受力图是不同的。

(2)作系统中某一局部受力图时,一定要单独画出隔离体图。不能在原系统图上画该局部的受力图。

(3)明确研究对象所受的全部力。要明确每个力的受力物体和施力物体。受力图上的力不能凭空产生,也不可遗漏。

(4)正确画出约束反力。确定研究对象时,各处约束反力作用线方位及指向应由该约束本身的特性来确定,不能主观臆测。内力均成对出现,受力图上不必画出。

(5)要注意识别二力构件,正确画出其约束反力。

小 结

(1) 静力学研究物体在力系作用下的平衡规律。

(2) 静力学五个公理是力对物体作用的最基本的规律,它们是建立静力学理论体系的基础。

(3) 约束就是限制非自由体运动的周围物体。它限制物体某些方向的位移,因此约束力的方向总是与约束所能阻碍的位移方向相反。应熟练掌握常见的几种约束类型特征、约束力方向的判断及约束力的表示方法。

(4) 对研究对象进行受力分析,正确画出其受力图是求解力学问题的关键。要特别注意作用力与反作用力的关系。研究对象所受的力分为主动力和约束力。通常先画主动力,再根据约束的性质画出各处约束力。注意区分内力与外力,在受力图上只画研究对象所受的外力。

科学家简介

王 仁



王仁(1921—2001),出生于浙江省吴兴县,著名力学家、地球动力学家和力学教育家,中国科学院院士。1943年以优异的成绩毕业于西南联合大学航空工程系,获工学学士学位。1950年在美国华盛顿大学航空工程系获理学硕士学位。同年,获洛克菲勒奖学金,进入布朗大学应用数学部进行深造,并于1953年获得该校的哲学博士学位,留校任副研究员。1954年秋赴芝加哥伊利诺伊理工学院力学系任助理教授。1955年回国后,应周培源教授之邀到北京大学数学力学系任教。王仁院士为中国塑性力学和地球动力学的研究与教学做出了奠基性和开拓性的贡献。他在塑性动力学和地质构造应力场分析等方面的研究成果在国内外均有较大影响,是中国将力学与地质学和固体地球物理学相结合的先驱者。

习题(一)

一、填空题

1. 作用于刚体上的力,可沿_____移动到刚体内任意一点,并不改变该力对刚体的作用效果。

2. 分析二力构件受力方位的理论依据是_____。

3. 力的平行四边形法则、作用与反作用定律对_____和_____均适用,而加减平衡力系公理只适用于_____。

4. 如图 1-19 所示, AB 杆自重不计,在五个已知力的作用下处于平衡。则作用于 B 点的四个力的合力 F_R 的大小 $F_R =$ _____,方向沿_____。

5. 如图 1-20 所示三种情况下,力 F 沿其作用线移至 D 点,则影响 A 、 B 处的约束力的是

图_____。

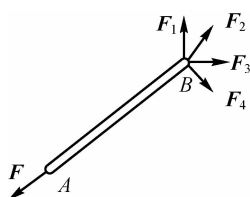


图 1-19

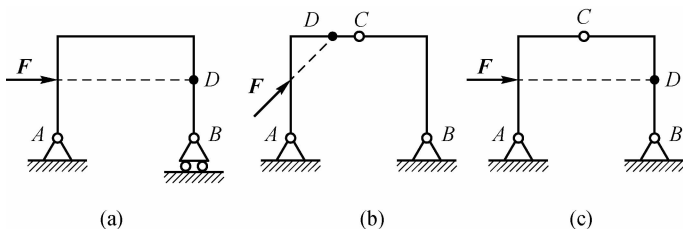


图 1-20

二、判断题

- () 1. 力的可传性只适用于刚体,不适用于变形体。
- () 2. 凡是合力都比分力大。
- () 3. 两个大小相等、方向相同的力分别作用于同一物体时,它们对物体产生的效应相同。
- () 4. 一刚体在两个力的作用下保持平衡的充要条件是这两个力等值、反向、共线。
- () 5. 若作用在刚体上的三个力的作用线共面,且汇交于一点,则该刚体必处于平衡状态。
- () 6. 等值、反向、共线的两个力一定是一对平衡力。
- () 7. 如图 1-21 所示,一力 P 从甲物体上沿力的作用线传递到乙物体上,不影响两物体的作用力与反作用力。
- () 8. 如图 1-22 所示,刚体受作用在同一直线上,指向相反的力 F_1 和 F_2 作用,它们的大小关系为 $F_1 = 2F_2$,则该二力的合力矢量可表示为 $F_R = F_1 + F_2$ 。

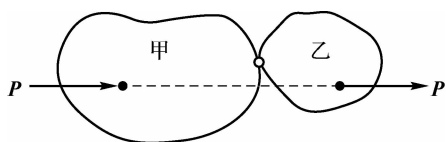


图 1-21

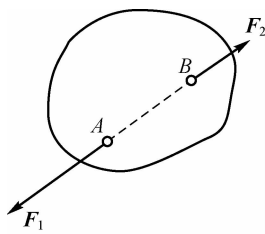


图 1-22

三、改错题

改正图 1-23~图 1-29 所示各物体受力图中的错误。

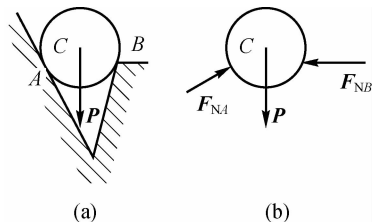


图 1-23

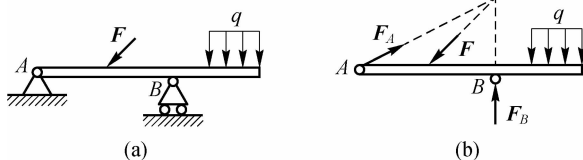


图 1-24

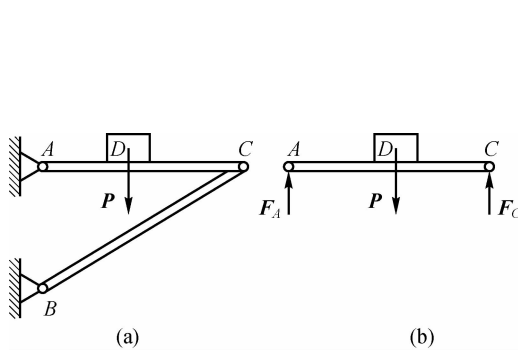


图 1-25

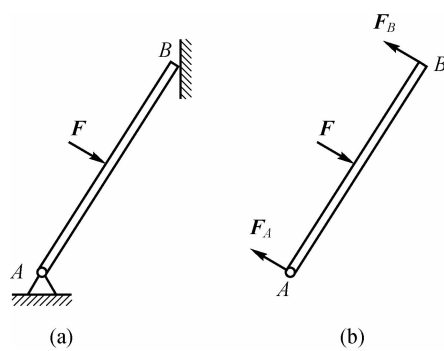


图 1-26

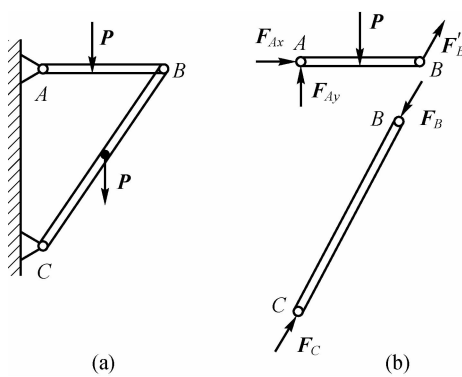


图 1-27

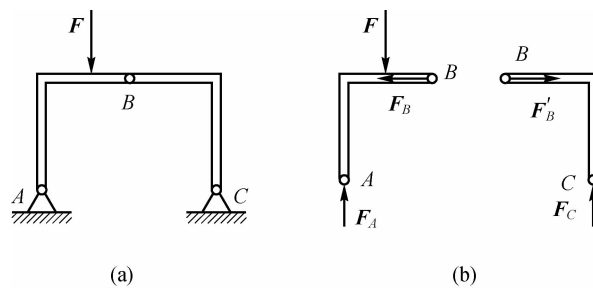


图 1-28

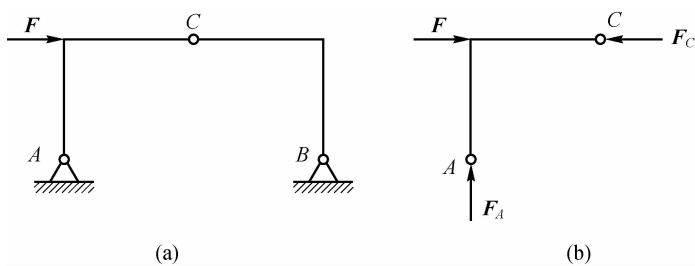


图 1-29

四、画受力图

画出图 1-30 所示各物体的受力图,其中,未画出重力的物体的重量均不计,所有接触处均为光滑接触(必须取分离体)。

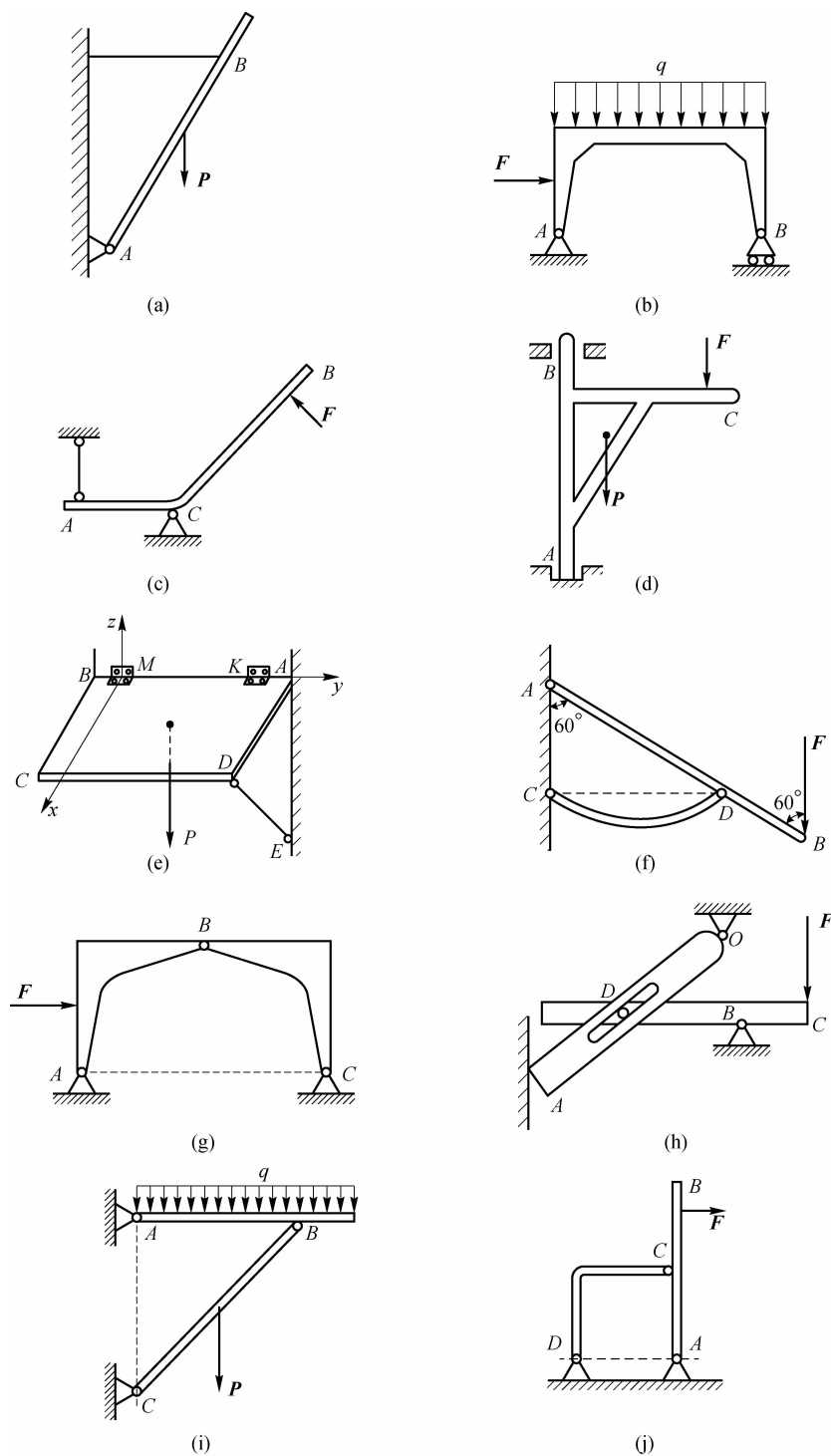


图 1-30

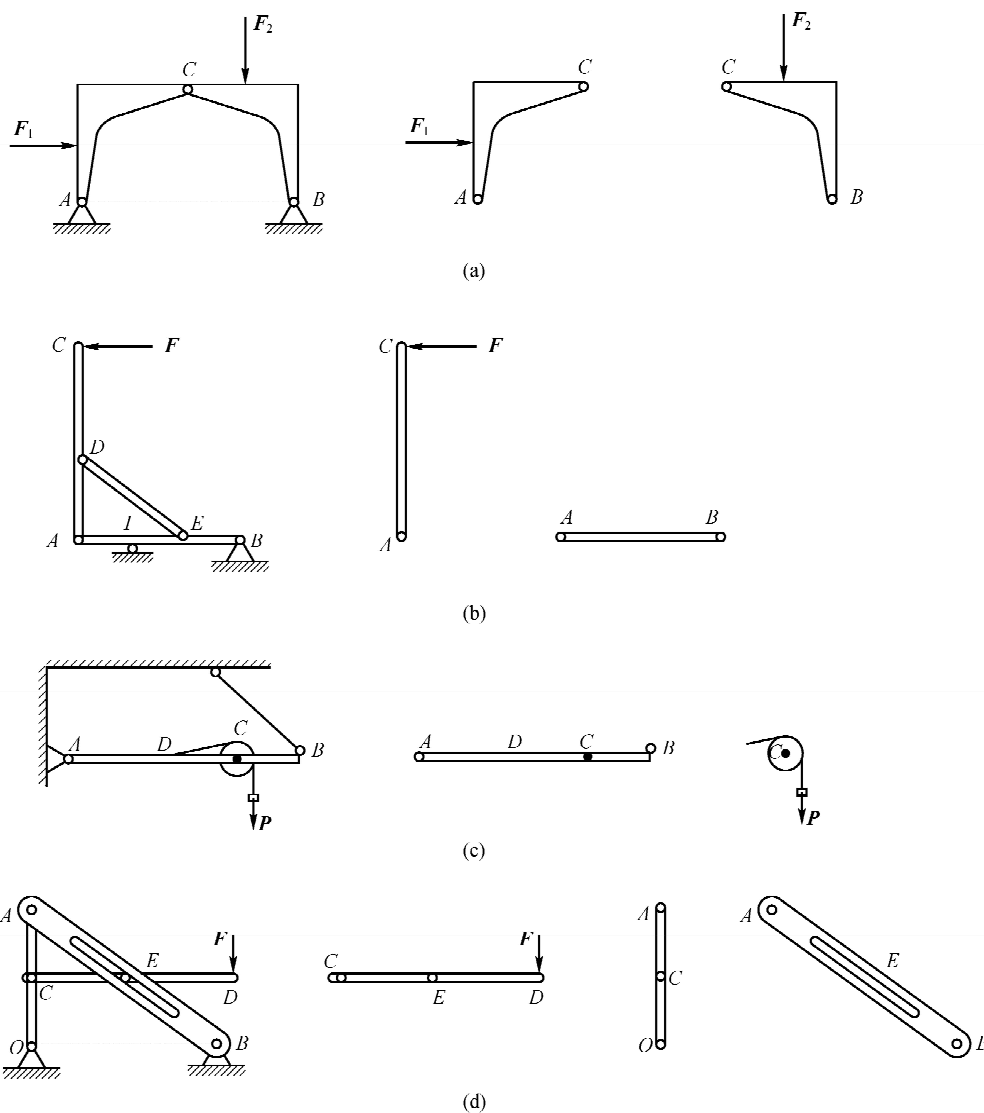
习题(二)

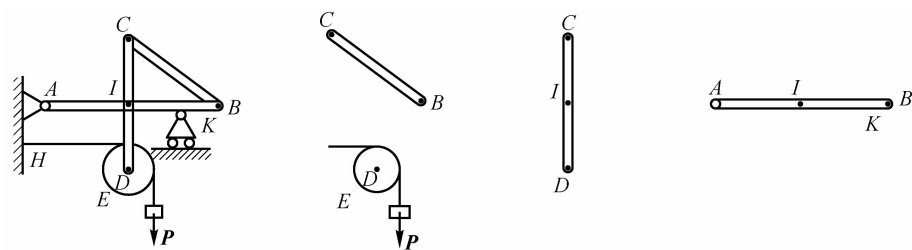
一、填空题

1. 柔索约束力方向沿_____，_____物体。
2. 光滑接触面约束力方向沿_____，_____物体。
3. 光滑铰链有_____个方向无法确定的约束力，通常简化为方向确定的_____个约束力。
4. 只受两个力作用而处于平衡的刚体称为_____构件，其约束力方向沿_____。

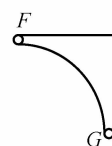
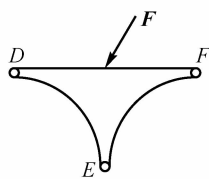
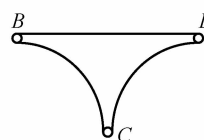
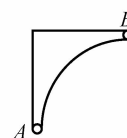
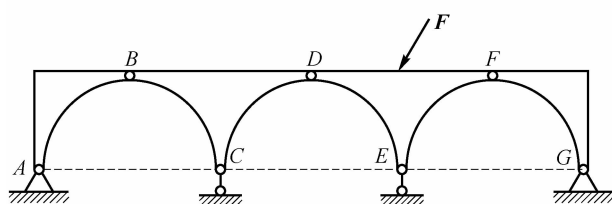
二、画受力图

画出图 1-31 所示各物体及其分离体的受力图，未画出重力的物体的重量均不计，所有接触处均为光滑接触。

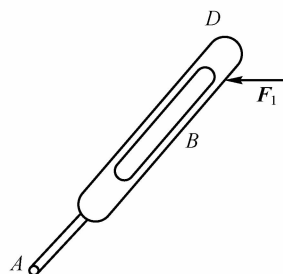
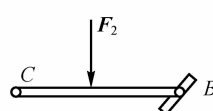
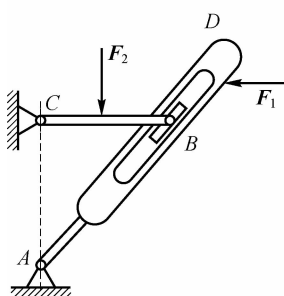




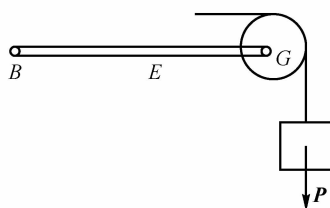
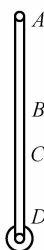
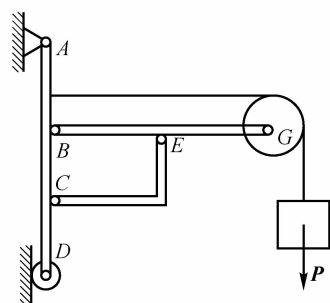
(e)



(f)



(g)



(h)

图 1-31

第 2 章

平面汇交力系和平面力偶系

平面汇交力系和平面力偶系属于简单力系,是研究复杂力系的基础。本章将采用几何法和解析法研究平面汇交力系的合成与平衡问题,介绍平面力偶的特性及平面力偶系合成与平衡问题。

2.1 平面汇交力系合成与平衡的几何法

平面汇交力系是指各力的作用线在同一平面内,且汇交于一点的力系。

2.1.1 平面汇交力系合成的几何法

设刚体受到平面汇交力系 F_1 、 F_2 、 F_3 、 F_4 作用,各力作用线汇交于点 A ,如图 2-1(a)所示。根据刚体力的可传性,先将各力的作用点沿其作用线移至汇交点 A ,然后任取一点 a ,应用力的多边形法则求得该力系的合力矢量,如图 2-1(b)所示。比较图 2-1(b)和图 2-1(c)可知,若改变各力的合成次序,力多边形的形状将发生改变,但封闭边合力矢 F_R 则完全相同,即矢序规则。

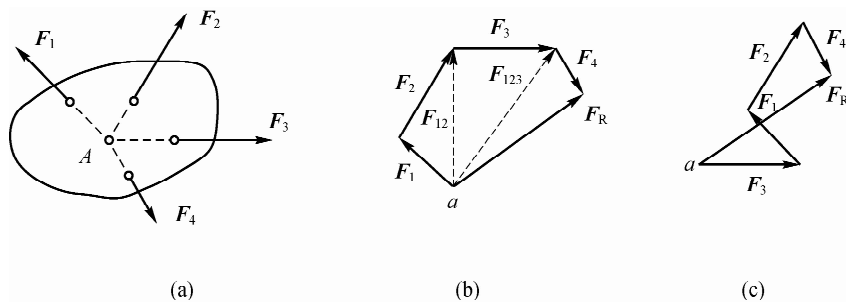


图 2-1

上述方法可推广到由 n 个力组成的平面汇交力系,得出结论:平面汇交力系的合成结果为一个合力,合力的作用线通过汇交点,合力的大小和方向由力多边形的封闭边矢量确定,即等于各分力的矢量和。其矢量表达式为:

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n = \sum \mathbf{F}_i \quad (2-1)$$

2.1.2 平面汇交力系平衡的几何条件

平面汇交力系可等效为一个合力。因此,平面汇交力系平衡的必要和充分条件是其合

力为零,即

$$\mathbf{F}_R = \sum \mathbf{F}_i = 0 \quad (2-2)$$

根据力的多边形法则,合力为零意味着力多边形封闭边长度为零,故得:平面汇交力系平衡的几何必要和充分条件为力的多边形自行封闭。

求解平面汇交力系的合成与平衡问题时可用图解法,即按比例先画出力多边形,然后量得所要求的未知量;或根据图形的几何关系,用三角公式计算所要求的未知量,这种解题方法称为几何法。

例 2-1 如图 2-2(a)所示,圆柱 O 重为 P ,放置在墙面与夹板之间。夹板与墙面间夹角为 60° 。若接触面光滑,试分别求出圆柱对墙面和夹板的压力。

解 (1)取圆柱为研究对象。

(2)画受力图。作用于圆柱 O 上的主动力有重力 P ,约束力为墙面和夹板对圆柱的法向反力 F_{NA} 和 F_{NB} 。此三力组成平面汇交力系,如图 2-2(b)所示。其中,未知力 F_{NA} 和 F_{NB} 的大小待求。

(3)作封闭的力多边形。根据平面汇交力系平衡的几何条件,这三个力组成一个封闭的力三角形。选择适当的比例尺,先从任一点 a 画已知力矢 $\vec{ab} = P$;然后,从力矢 P 的末端 b 作平行于 AO 的直线;最后,过力矢 P 的始端 a 作平行于 BO 的直线,两直线交于点 c ,构成一封闭的力三角形 abc ,如图 2-2(c)所示。

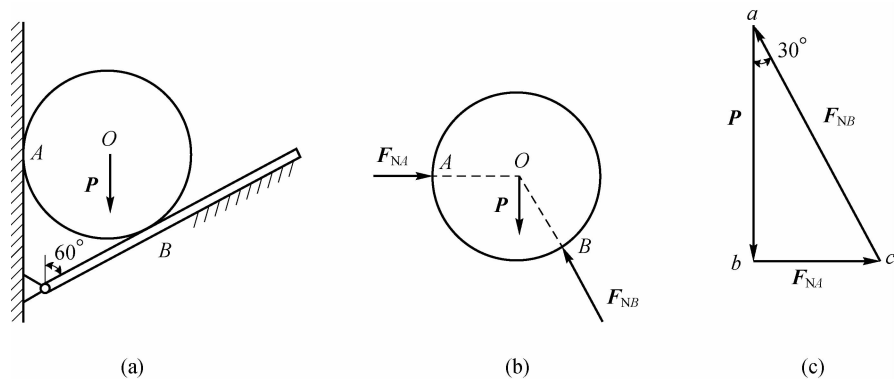


图 2-2

(4)确定未知量。在力三角形 abc 中,线段 bc 和 ca 的长度分别代表力 F_{NA} 与 F_{NB} 的大小,按选定的比例尺即可直接量得,或利用三角公式计算 F_{NA} 和 F_{NB} 的大小:

$$F_{NA} = P \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} P$$

$$F_{NB} = \frac{P}{\cos 30^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3} P$$

F_{NA} 和 F_{NB} 分别为墙面与夹板作用在圆柱上的约束力。根据作用和反作用定律,圆柱对墙面和夹板的压力与 F_{NA} 和 F_{NB} 大小相等,方向相反。

几何法求解平衡问题的主要步骤如下:

(1)选取研究对象。根据题意,选取适当的平衡物体作为研究对象。

(2)对隔离体进行受力分析。解除研究对象的所有约束,单独画出隔离体,并在隔离体

上依次画出所有主动力和约束力。

(3) 选择适当的比例尺,将研究对象上的各个力依次首尾相连,作出封闭的力多边形。作图时应从已知力开始,根据矢序规则和封闭特点可确定未知力的方位与指向。

(4) 确定未知量。按选定的比例尺量取未知量,或利用三角公式求出未知量。

2.2 平面汇交力系合成与平衡的解析法

力的投影是力矢量与该投影轴单位矢量的点积。

其表达式为

$$F_e = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e} = F \cos(\mathbf{F}, \mathbf{e}) \quad (2-3)$$

2.2.1 力在平面正交直角坐标轴上的投影

在平面正交直角坐标系 Oxy 内,若已知力 $\mathbf{F}$ 与 x 、 y 轴正向的夹角分别为 α 、 β ,如图 2-3 所示,则力 $\mathbf{F}$ 在 x 和 y 轴上的投影分别为

$$\left. \begin{aligned} F_x &= F \cos(\mathbf{F}, \mathbf{i}) = F \cos \alpha \\ F_y &= F \cos(\mathbf{F}, \mathbf{j}) = F \cos \beta \end{aligned} \right\} \quad (2-4)$$

即力在某轴上的投影等于力的大小乘以力与该轴正向间夹角的余弦。当力与轴向间的夹角为锐角时,其值为正;当夹角为钝角时,其值为负。在实际运算中,通常可取力与坐标轴间的锐角来计算投影的大小,并通过观察来直接判定投影的正负号。

反之,如果力 $\mathbf{F}$ 的两个投影 F_x 和 F_y 已知,则该力的大小和方向余弦分别为

$$\left. \begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \\ \cos \alpha &= \frac{F_x}{F}, \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F} \end{aligned} \right\} \quad (2-5)$$

必须注意,力的投影与分力是两个不同的概念,力在坐标轴上的投影是代数量,而分力则是矢量。显然,力在两正交坐标轴上的投影与力沿该轴分力的大小相等,投影的正负号与该分力的指向对应。当 x 、 y 两轴不垂直时,该力沿两轴的分力 $\mathbf{F}_x$ 和 $\mathbf{F}_y$ 在数值上不等于力在两轴上的投影 F_x 与 F_y 。

在直角坐标系中,两者之间的关系可表示为

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} \quad (2-6)$$

其中, $\mathbf{i}$ 、 $\mathbf{j}$ 分别为沿 x 轴和 y 轴正向的单位矢量。式(2-6)称为力的解析表达式。

2.2.2 合力投影定理

由图 2-4 可得合力投影定理:合力在某一轴上的投影,等于各分力在同一轴上投影的代数和,即

$$\left. \begin{aligned} F_{Rx} &= F_{1x} + F_{2x} + \cdots + F_{nx} = \sum F_{ix} \\ F_{Ry} &= F_{1y} + F_{2y} + \cdots + F_{ny} = \sum F_{iy} \end{aligned} \right\} \quad (2-7)$$

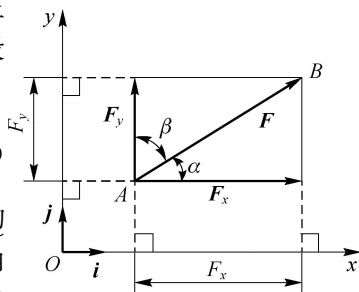


图 2-3

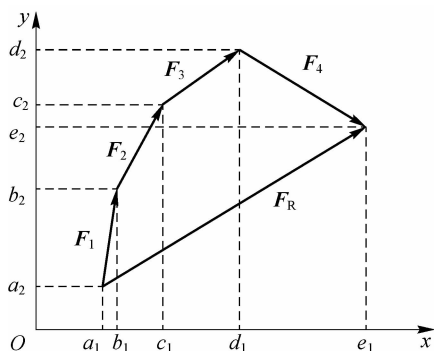


图 2-4

合力投影定理建立了合力投影与分力投影之间的关系。

2.2.3 平面汇交力系合成的解析法

利用合力投影定理,采用解析法也可确定平面汇交力系的合力。

首先计算各分力 F_i 在 x 、 y 轴上的投影 F_{ix} 、 F_{iy} ,然后根据合力投影定理计算合力 F_R 在 x 、 y 轴上的投影 F_{Rx} 和 F_{Ry} ,最后由式(2-5)求得合力的大小与方向余弦,即

$$\left. \begin{aligned} F_R &= \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = \sqrt{(\sum F_{ix})^2 + (\sum F_{iy})^2} \\ \cos \alpha &= \frac{F_{Rx}}{F_R} = \frac{\sum F_{ix}}{F_R}, \quad \cos \beta = \frac{F_{Ry}}{F_R} = \frac{\sum F_{iy}}{F_R} \end{aligned} \right\} \quad (2-8)$$

2.2.4 平面汇交力系平衡的解析条件——平衡方程

平面汇交力系平衡的必要和充分条件:力系的合力为零。平面汇交力系平衡时,根据式(2-8)有 $F_R = \sqrt{(\sum F_{ix})^2 + (\sum F_{iy})^2} = 0$,即

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{ix} &= 0 \\ \sum F_{iy} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-9)$$

平面汇交力系平衡的必要和充分条件:力系中各力在两个坐标轴上投影的代数和均为零。式(2-9)称为平面汇交力系的平衡方程。

显然,平面汇交力系有两个独立的平衡方程,可求解两个未知量。解题时,未知力的指向可随意假设,若计算结果为正值,则表示假设力的指向与实际相同;若为负值,则表示假设力的指向与实际相反。但投影坐标轴的正向可任意选择,以方便投影为宜。

例 2-2 滑轮 C 连接在铰接三角架 ABC 上。绳索绕过滑轮,一端缠绕在绞车 D 上,另一端悬挂重 $P=100 \text{ kN}$ 的重物,如图 2-5(a)所示。不计各构件自重,以及滑轮 C 的尺寸、质量和摩擦。求杆 AC 和 BC 的受力情况。

解 (1)选取滑轮 C 为研究对象。

(2)画受力图。由于滑轮 C 将载荷 P 及所求未知力联系起来,故求杆 AC 和 BC 所受的力可转化为求两杆对滑轮的约束力。杆 AC 和 BC 均为二力杆件,假设两杆都受拉力,滑轮受力如图 2-5(b)所示。

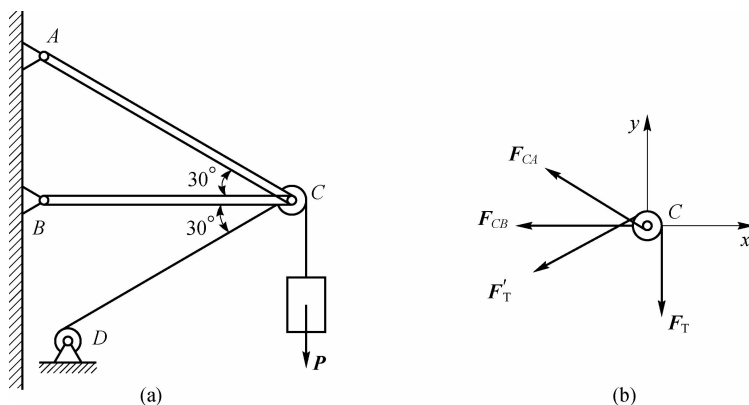


图 2-5

(3)列平衡方程。选取坐标轴如图 2-5(b)所示。

$$\sum F_x = 0, \quad -F_{CB} - F_{CA} \cos 30^\circ - F'_T \cos 30^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{CA} \sin 30^\circ - F'_T \sin 30^\circ - F_T = 0$$

$$\text{得 } F_{CA} = 300 \text{ kN}, \quad F_{CB} = -200\sqrt{3} \text{ kN}.$$

F_{CA} 为正值, 表明受力图中 F_{CA} 的指向与实际指向相同; F_{CB} 为负值, 表明受力图中 F_{CB} 的指向与实际指向相反。

例 2-3 连杆机构由三个不计杆重的杆铰接组成, 如图 2-6(a)所示。铰链 B 处受水平力 F_1 作用, 当机构处于平衡状态时, 求铰 C 处的水平力 F_2 的大小。

解 机构中的三根杆 AB、BC、CD 均为二力杆件, 机构整体所受的力系不是平面汇交力系, 故不可取整体为研究对象来求解。

(1)取铰 B 为研究对象, 其受力如图 2-6(b)所示, 列平衡方程。取 y 轴与力 F_{BA} 垂直。

$$\sum F_y = 0, \quad F_1 \cos 30^\circ + F_{BC} \cos 60^\circ = 0$$

$$\text{得 } F_{BC} = -\sqrt{3}F_1.$$

(2)取铰 C 为研究对象, 其受力如图 2-6(c)所示, 列平衡方程。取 x 轴与力 F_{CD} 垂直。

$$\sum F_x = 0, \quad -F_2 - F_{CB} \cos 30^\circ = 0$$

$$\text{得 } F_{CB} = F_{BC} = -\sqrt{3}F_1, \quad F_2 = 1.5F_1.$$

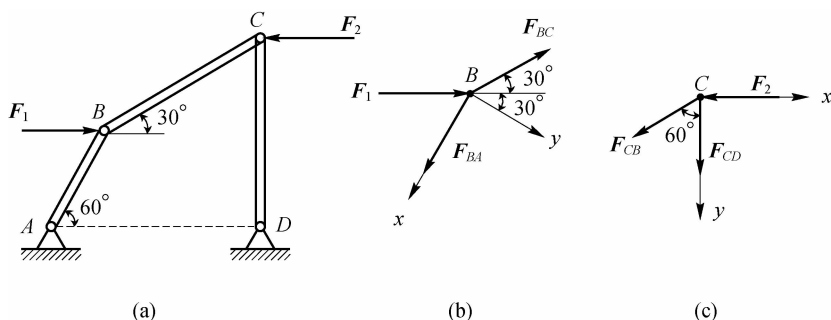


图 2-6

分析求解实际问题时, 应注意以下两点:

第一篇 静力学

(1)恰当选取研究对象,明确解题思路、方法和步骤。

(2)恰当选取坐标轴和平衡方程,提高计算效率。

例 2-4 如图 2-7(a)所示简单的压榨设备。当在 A 点施加力 F 时,物体 M 将受到压板的挤压力。已知 $F=200\text{ N}$,求当 $\alpha=30^\circ$ 时物体 M 所受的挤压力。

解 由于连杆 AB 的压力未知,故首先应根据 A 点(销钉)的平衡,求出连杆 AB 所受的力,然后再根据压板的平衡,求 M 物体所受的挤压力。

(1)取 A 点为研究对象。A 点受三个力作用: F 、连杆 AB 的作用力 F_1 和 AC 的作用力 F_2 (均设为压力)。画出受力图如图 2-7(b)所示。列平衡方程

$$\sum F_x=0, \quad F+F_1 \sin \alpha+F_2 \sin \alpha=0$$

$$\sum F_y=0, \quad F_2 \cos \alpha-F_1 \cos \alpha=0$$

$$\text{得 } F_1=F_2=-\frac{F}{2 \sin \alpha}=-200\text{ N}。$$

(2)取压板为研究对象。压板受三个力作用:连杆 AB 的作用力 $F'_1=-F_1$,槽壁的反作用力 F_3 ,物体 M 的作用力 F_N 。画出受力图如图 2-7(c)所示。

$$\sum F_y=0, \quad F_N+F'_1 \cos \alpha=0$$

$$\text{得 } F_N=-F'_1 \cos \alpha=100 \sqrt{3}\text{ N}。$$

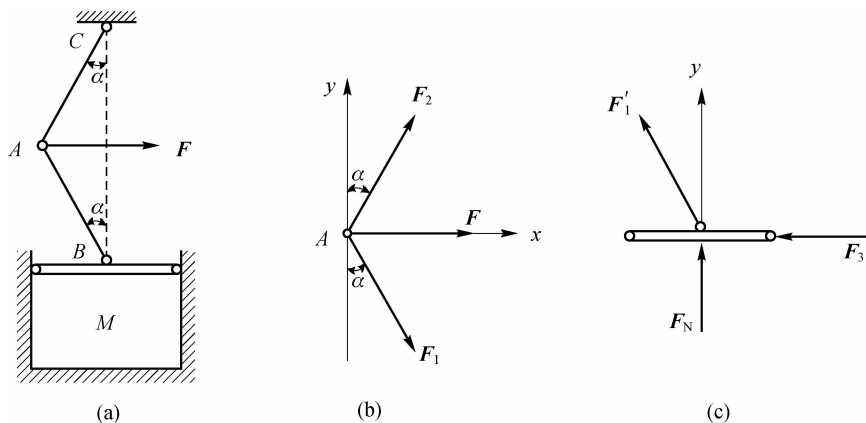


图 2-7

显然,力 F 保持不变,随着 α 角的减小,力 F_1 和 F_2 增大。根据作用与反作用定律,压板挤压物体 M 的反作用力也增大。

由上例可知,解析法求解平衡问题的主要步骤如下:

(1)选取研究对象。

(2)分析研究对象的受力情况,画其受力图。

(3)选取适当的坐标系,列出平衡方程式并求解。

2.3 平面力矩

力对刚体的作用不仅可使刚体产生移动效应,也可使刚体产生转动效应。力对刚体的移动效应可用力矢来度量;而力对刚体的转动效应可用力对点之矩(简称力矩)来度量,即力

矩是度量力对刚体转动效应的物理量。

2.3.1 力对点之矩

如图 2-8 所示,用扳手转动螺母,在扳手上作用一力 F ,扳手和螺母将绕螺母中心 O 转动。力 F 使扳手与螺母绕 O 转动的效应既与力 F 的大小有关,也与 O 点到力 F 的作用线的垂直距离 h 有关。通常顺时针转动时,螺母被拧紧;逆时针转动时,螺母被松开。又如用手推门,使得门板绕门轴转动也是这样。

人们通过归纳总结转动或有转动趋势的实例,形成一个抽象化的概念,即力对点之矩,用来表示力使物体绕一点转动的效应。

如图 2-9 所示,设平面上作用一力 F ,在该平面内任取一点 O ,点 O 称为矩心,点 O 到力 F 作用线或其延长线的垂直距离 h 称为力臂。

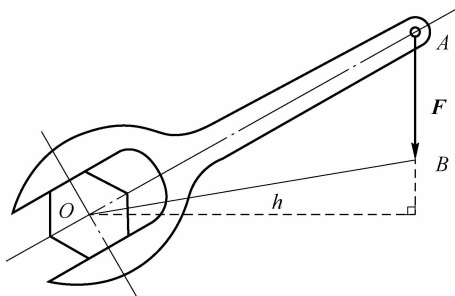


图 2-8

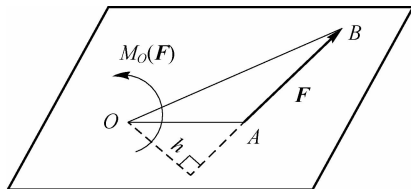


图 2-9

在平面问题中,力对点之矩是一个代数量,其绝对值等于力的大小与力臂的乘积,正负可按法确定:力使物体绕矩心逆时针转向时为正,反之为负。

力 F 对于点 O 的矩用 $M_O(F)$ 表示,即

$$M_O(F) = \pm Fh \quad (2-10)$$

由图 2-9 易知: $|M_O(F)| = |F \cdot h| = 2A_{\triangle OAB}$ (2-11)

应当指出,力对点之矩与矩心的位置有关,计算时应当指出矩心位置。但是,当力的作用线通过矩心时,则力对该点之矩等于零,此时力对刚体不能产生转动效果。力矩的单位常用 $\text{N} \cdot \text{m}$ 或 $\text{kN} \cdot \text{m}$ 。

例 2-5 一起重扒杆受力如图 2-10 所示,已知 $F_1 = 50 \text{ kN}$, $F_2 = 100 \text{ kN}$ 。试分别求此二力对点 A 的矩。

解 力 F_1 垂直于 AB ,力臂为 6 m ,故力 F_1 对 A 点的矩为

$$M_O(F_1) = 50 \text{ kN} \times 6 \text{ m} = 300 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

力 F_2 对 A 点的力臂 AC 要在 $\triangle ABC$ 中求出,即

$$AC = AB \sin 30^\circ = 6 \text{ m} \times 0.5 = 3 \text{ m}$$

故 $M_O(F_2) = -100 \text{ kN} \times 3 \text{ m} = -300 \text{ kN} \cdot \text{m}$

F_2 对 A 点的矩转向是顺时针的,故为负值。

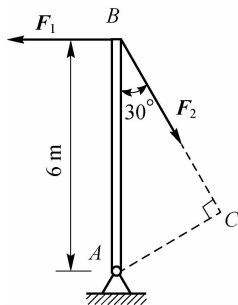


图 2-10

2.3.2 合力矩定理

合力矩定理:平面汇交力系的合力对力系所在平面内任一点之矩等于各分力对该点之

矩的代数和。即

$$M_O(\mathbf{F}_R) = \sum M_O(\mathbf{F}_i) \quad (2-12)$$

合力矩定理建立了合力对某点的矩与各个分力对同一点之矩的关系。无论何种力系,只要力系有合力,合力矩定理就适用。

如图 2-11 所示,已知力 $\mathbf{F}$ 、作用点 $A(x, y)$ 及夹角 θ , 求力 $\mathbf{F}$ 对坐标原点 O 之矩。可用式(2-12)求解分力 $\mathbf{F}_x$ 、 $\mathbf{F}_y$ 对点 O 之矩而得到,即

$$M_O(\mathbf{F}) = M_O(\mathbf{F}_y) + M_O(\mathbf{F}_x) = xF \sin \theta - yF \cos \theta$$

即

$$M_O(\mathbf{F}) = xF_y - yF_x \quad (2-13)$$

式(2-13)称为平面内力矩的解析表达式。

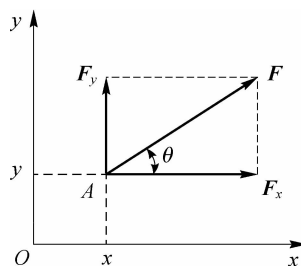


图 2-11

例 2-6 如图 2-12 所示简支刚架, 已知 $\mathbf{F}$ 、 a 、 b 和 α 。试计算力 $\mathbf{F}$ 对点 A 的矩。

解 方法一: 根据定义求 $M_A(\mathbf{F})$ 。

先计算力臂 d , 由图中的几何关系有

$$d = AE \sin \alpha = (AD - ED) \sin \alpha = (a - b \cot \alpha) \sin \alpha = a \sin \alpha - b \cos \alpha$$

故 $M_A(\mathbf{F}) = Fd = F a \sin \alpha - F b \cos \alpha$ 。

方法二: 利用合力矩定理求 $M_A(\mathbf{F})$ 。

先将力 $\mathbf{F}$ 分解为相互垂直的两个分力 $\mathbf{F}_x$ 与 $\mathbf{F}_y$, 然后利用合力矩定理求解,

即 $M_A(\mathbf{F}) = M_A(\mathbf{F}_x) + M_A(\mathbf{F}_y) = -F_x b + F_y a = F a \sin \alpha - F b \cos \alpha$ 。

例 2-7 简支梁受三角形分布载荷作用, 如图 2-13 所示。分布载荷集度最大值为 q_0 , 梁长为 l 。试求合力的大小及作用线的位置。

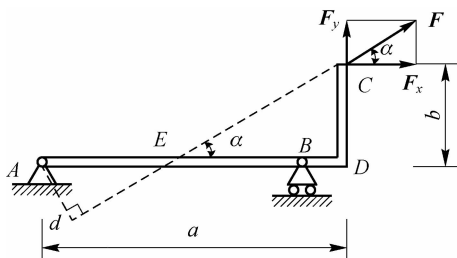


图 2-12

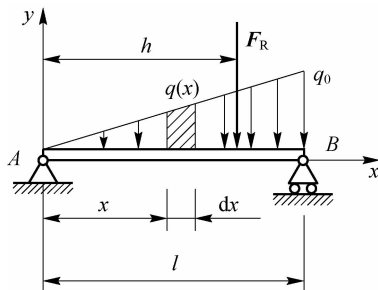


图 2-13

解 梁上距离 A 端为 x 的微梁段 dx 处, 作用的微小载荷 $dF = q dx$, 其中

$$q(x) = \frac{x}{l} q_0$$

故三角形分布载荷的合力大小为 $F_R = \int_0^l \frac{x}{l} q_0 dx = \frac{1}{2} q_0 l$ 。

设合力 $\mathbf{F}_R$ 作用线距 A 端的距离为 h , 根据合力矩定理有

$$-F_R h = \int_0^l -q(x) x dx$$

上式左端为合力对 A 点的矩,右端为分布载荷对 A 点之矩的代数和。

$$\text{得 } h = \frac{2}{3}l。$$

结果说明:合力的大小等于三角形分布载荷所覆盖的面积,合力作用线的位置通过三角形的几何中心。

2.4 平面力偶系

2.4.1 力偶

实践中常会遇到某些物体同时受到大小相等、方向相反、作用线不在同一直线上的两个力的作用情况。例如,司机双手转动方向盘,如图 2-14(a)所示;钳工用丝锥攻螺纹,如图 2-14(b)所示等。在力学中,将这种由两个大小相等、方向相反,且不共线的平行力系组成的力系,称为力偶,用符号 (F, F') 表示,如图 2-14(c)所示。力偶所在的平面称为力偶作用面,力偶中二力作用线间的垂直距离 d 称为力偶臂。

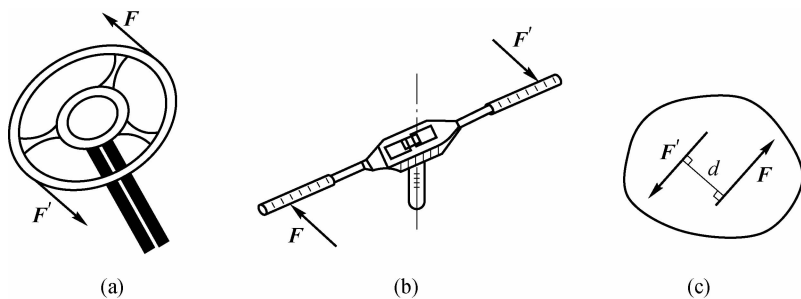


图 2-14

2.4.2 力偶矩

力偶对刚体只能产生转动效应,而不产生移动效应。实践表明,力偶对刚体的转动效应不仅与力偶中力的大小成正比,而且与力偶臂成正比;此外,力偶的转向决定刚体的转向。因此,定义力偶 (F, F') 的矩来度量力偶对刚体的转动效应,简称力偶矩。

$$M = \pm Fd \quad (2-14)$$

即力偶矩的大小等于力偶中力的大小和力偶臂的乘积;正负号表示力偶在作用面内的转向,通常规定逆时针转动为正,反之为负。

在平面问题中,力偶矩仍为代数量,其单位与力矩相同,在国际单位制中为 $\text{N} \cdot \text{m}$ 。

2.4.3 力偶的性质

1. 力偶不能与一个力等效或者平衡

由力偶对刚体的作用效应可知,力偶不能与一个力等效,也不能与一个力平衡;力偶只能与力偶等效或者平衡。此性质可帮助确定力的作用线的位置。

注意:构成力偶的两个力大小相等、方向相反,它们在任意坐标轴上投影的代数和均为零,因其不共线,故力偶本身并不能使刚体平衡。

2. 力偶与矩心位置无关

构成力偶的两个力对其作用面内任一点之矩代数和恒等于力偶矩,故力偶与矩心位置无关。

如图 2-15 所示,在力偶作用面内任取一点 O 为矩心,设力 F' 相对于矩心 O 的力臂为 x ,力 F 相对于矩心 O 的力臂为 $x+d$,则组成力偶的两个力 F 、 F' 对点 O 之矩的代数和为

$$M_O(F) + M_O(F') = F(x+d) - F'x = Fd = M$$

故力偶与矩心的位置无关。

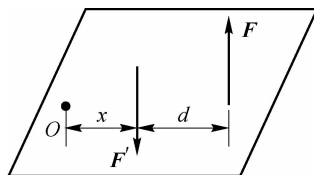


图 2-15

2.4.4 平面内力偶的等效定理

定理:在同平面内的两个力偶,只要力偶矩相等,则两力偶彼此等效。

此定理给出了同一平面内两个力偶等效的条件。由此可得下列推论:

(1) 力偶可以在其作用面内任意移转,而不改变它对刚体的作用效应。

力偶对刚体的作用效应与其在作用面内的位置无关。

(2) 只要保持力偶矩大小和转向不变,可同时任意改变力偶中力的大小和力偶臂的长短,而不改变它对刚体的作用效应。

由此可见,力的大小和力偶臂都不是力偶的特征量,只有力偶矩才是平面力偶对刚体作用的唯一度量。故常用力偶矩 M 的符号来表示力偶,如图 2-16 所示。

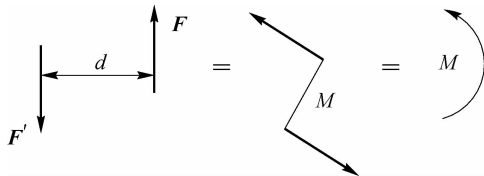


图 2-16

2.4.5 平面力偶系的合成与平衡条件

1. 平面力偶系的合成

设平面力偶系由两个力偶 (F_1, F'_1) 、 (F_2, F'_2) 所组成,其力偶矩分别为 $M_1 = F_1 d_1$, $M_2 = -F_2 d_2$,如图 2-17(a)所示,试求它们的合成结果。

根据同平面内力偶等效定理,在保持力偶矩不变的情况下,同时改变这两个力偶中力的大小和力偶臂的长短,使它们具有相同的臂长 d ,并将它们在其作用面内移转,使得力的作用线重合,如图 2-17(b)所示。得到与原力偶等效的两个新力偶 (F_3, F'_3) 、 (F_4, F'_4) ,并有

$$M_1 = F_1 d_1 = F_3 d, \quad M_2 = -F_2 d_2 = -F_4 d$$

分别将作用在点 A 和点 B 的力合成(设 $F_3 > F_4$),得到两个新的力 F 和 F' ,其中

$$F = F_3 - F_4, \quad F' = F'_3 - F'_4$$

它们组成了与原力偶系等效的合力偶 (F, F') ,如图 2-17(c)所示,该合力偶矩为

$$M = Fd = (F_3 - F_4)d = F_3 d - F_4 d = M_1 + M_2$$

显然,由任意多个力偶组成的平面力偶系,亦可用上述方法合成。即平面力偶系可合成一个合力偶,合力偶矩等于各分力偶矩的代数和,即

$$M = M_1 + M_2 + \cdots + M_n = \sum M_i \quad (2-15)$$

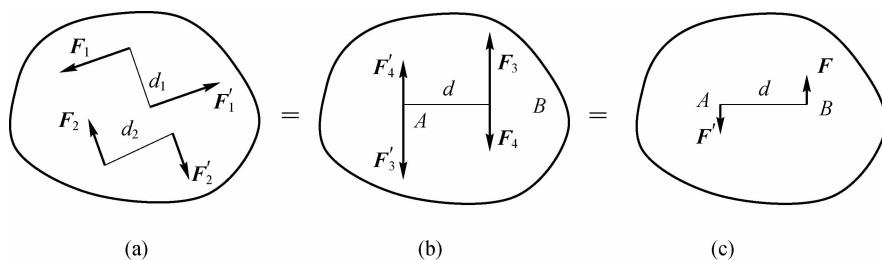


图 2-17

2. 平面力偶系的平衡条件

平面力偶系平衡的充分必要条件：力偶系中各力偶矩的代数和等于零。即

$$\sum M_i = 0 \quad (2-16)$$

式(2-16)称为平面力偶系的平衡方程。利用平面力偶系的平衡方程可求解一个未知量。

例 2-8 简支梁 AB 上作用一力偶, 其力偶矩大小 $M=100 \text{ kN} \cdot \text{m}$, 转向如图 2-18(a) 所示。已知梁长 $l=5 \text{ m}$, 若不计梁的自重, 试求支座 A 、 B 的约束力。

解 (1) 取简支梁 AB 为研究对象。

(2) 画受力图。简支梁 AB 上作用有力偶矩为 M 的力偶和支座 A 、 B 的约束力。活动铰支座 B 的约束力 F_B 的作用线沿铅垂方向, 根据力偶只能与力偶平衡的性质可知, 约束力 F_A 和 F_B 必构成一个力偶, 因此 F_A 的作用线也沿铅垂方向而与 F_B 反向, 简支梁受力如图 2-18(b) 所示。于是, 简支梁 AB 上的作用力构成平面力偶系。

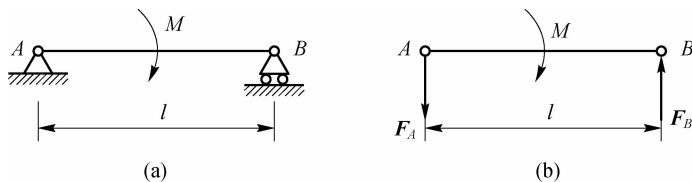


图 2-18

(3) 列平衡方程。

根据平面力偶系的平衡条件列平衡方程, 有

$$\sum M_i = 0, \quad F_A l - M = 0$$

解得支座 A 的约束力为

$$F_A = \frac{M}{l} = \frac{100}{5} \text{ kN} = 20 \text{ kN}$$

$$F_A = F_B$$

F_A 和 F_B 均为正值, 说明图中 F_A 和 F_B 的假设方向与实际一致。

例 2-9 如图 2-19(a) 所示结构, 曲杆 AB 与直角折杆 BC 在点 B 铰接, 已知几何尺寸 $r, l=2r$ 及在直角折杆 BC 上作用力偶的力偶矩为 M , 不计各杆自重。试求铰链 A 、 C 处的约束力。

解 铰链 A 、 C 处的约束力方向均未知, 由于杆 AB 为二力构件, 可知 F_A 必沿 A 、 B 两点连线, 假设 F_A 指向如图 2-19(b) 所示。

第一篇 静力学

(1)取整体为研究对象。

(2)画受力图。因整体所受主动载荷只有力偶 M , 故 A 、 C 处的约束力 F_A 和 F_C 应组成一力偶才能与之平衡, 其受力图如图 2-19(b)所示。

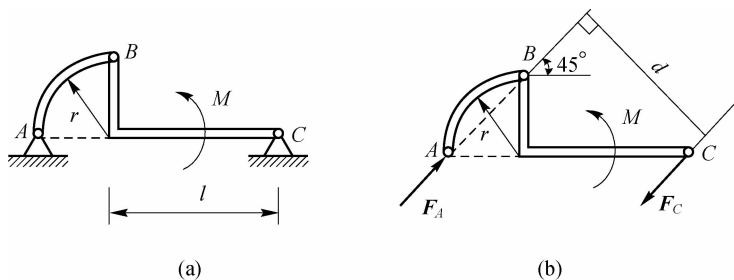


图 2-19

(3)列平衡方程。

$$\sum M_i = 0, \quad -F_A \cdot d + M = 0$$

$$\text{得 } F_A = \frac{M}{d} = \frac{M}{\frac{3\sqrt{2}}{2}r} = \frac{\sqrt{2}M}{3r}, \quad F_C = F_A = \frac{\sqrt{2}M}{3r}.$$

小 结

(1)平面汇交力系的合力。

①几何法。根据力的多边形法则, 各分力矢量依次首尾相接, 合力的大小和方向由力多边形的封闭边决定, 其指向由第一个力的起点指向最后一个力的终点, 即

$$\mathbf{F}_R = \sum \mathbf{F}_i$$

合力的作用线通过汇交点。

②解析法。合力的解析表达式为

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = \sqrt{(\sum F_{ix})^2 + (\sum F_{iy})^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{F_{Rx}}{F_R} = \frac{\sum F_{ix}}{F_R}, \quad \cos \beta = \frac{F_{Ry}}{F_R} = \frac{\sum F_{iy}}{F_R}$$

(2)平面汇交力系的平衡条件。

①平衡的必要与充分条件: $\mathbf{F}_R = \sum \mathbf{F}_i = 0$ 。

②平衡的几何条件: 平面汇交力系的力多边形自行封闭。

③平衡的解析条件(平衡方程): $\sum F_{ix} = 0, \quad \sum F_{iy} = 0$ 。

(3)平面内力对点 O 之矩。

平面内力对点之矩为代数量, 其正负号规定: 以逆时针为正, 反之为负。

(4)合力矩定理。平面汇交力系的合力对力系所在平面内任一点之矩等于力系中各力对同一点之矩的代数和, 即

$$M_O(\mathbf{F}_R) = \sum M_O(\mathbf{F}_i)$$

(5)力偶与力偶矩。

力偶是由两个大小相等、方向相反且不共线的平行力组成的特殊力系。

平面力偶对物体的运动效应取决于力偶矩的大小和转向,它是代数量,即

$$M = \pm Fd$$

正负号规定:力偶使物体逆时针转动为正,反之为负。

(6)平面力偶的性质:力偶没有合力;力偶不能与一个力等效或者平衡;力偶对平面内任一点之矩为力偶矩,力偶矩与矩心的位置无关。

(7)平面力偶的等效定理。同一平面内两力偶等效的充分必要条件是其力偶矩相等。

(8)合力偶矩等于力偶系中各力偶矩的代数和。

(9)平面力偶系的平衡条件:力偶系中各力偶矩的代数和等于零。

科学家简介

钱 令 希



钱令希(1916—2009),江苏无锡人,著名力学家和教育家,中国科学院资深院士。1936年毕业于上海国立中法工学院(现上海理工大学)。1938年获比利时布鲁塞尔自由大学最优等工程师学位。回国后历任铁路桥梁工程师,云南大学、浙江大学教授,1952年起在大连工学院(现大连理工大学)工作,历任教授、系主任、研究所所长、院长。曾任中国力学学会第二届理事长。在培养人才和推动科技进步两方面做出了重要贡献。学术上,在结构力学、板壳理论、极限分析、变分原理、结构优化设计等方面有深入研究和重要成果。主张力学为工程服务,并身体力行,在桥梁、水坝、港工、造船和国防等工程中发挥了力学研究的作用。在我国大力倡导建立计算力学学科,并在大连理工大学培养和带领出一支优秀的计算力学队伍,在工程力学和结构优化设计方面做出了显著成绩。1955年选聘为中国科学院院士(学部委员)。

习题(一)

一、填空题

1. 平面汇交力系是指各力的作用线_____,且_____一点的力系。
2. 平面汇交力系可简化为_____,其大小和方向等于_____,作用线通过_____。
3. 平面汇交力系平衡的必要和充分条件是_____,此时力多边形_____。
4. 平面汇交力系有_____个独立平衡方程,可求解_____个未知量。
5. 力在直角坐标轴上的投影的大小与该力沿这两个轴的分力大小_____。
6. 已知平面汇交力系的汇交点为 A ,且满足方程 $\sum M_B(\mathbf{F}) = 0$ (B 为力系平面内的另一点),若此力系不平衡,则可简化为_____。

第一篇 静力学

7. 某刚体受平面汇交力系作用, 其力多边形如图 2-20 所示, 则图 _____ 表示平衡力系; 图 _____ 表示有合力, 其合力 $F_R =$ _____。

8. 图 2-21 所示结构在铰链 C 处受铅垂力 F 作用, 不计各杆的重量, 则 A 支座处约束力的大小为 _____。

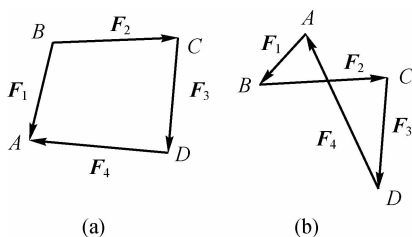


图 2-20

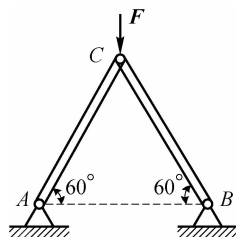


图 2-21

9. 两直角杆 AC 、 CB 支承如图 2-22 所示, 在铰 C 处受力 F 作用, 则 A 、 B 两处约束力方向与 x 轴的正向所成的夹角分别为 _____, _____; A 、 B 两处约束力大小分别为 $F_A =$ _____, $F_B =$ _____。

10. 已知某刚体上作用一由四个力组成的平面汇交力系, 其力矢关系构成平行四边形, 如图 2-23 所示, 则该力系最终简化的结果为 _____。

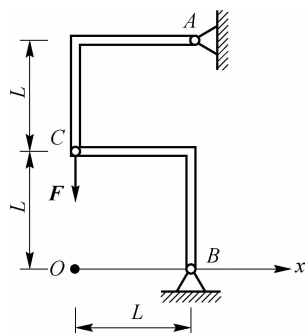


图 2-22

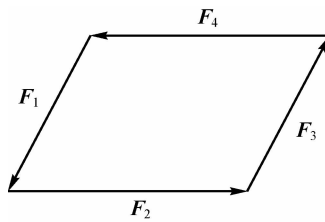


图 2-23

11. 平面汇交力系的力多边形如图 2-24 所示, 则

图 2-24(a) 中四个力关系的矢量表达式 _____;

图 2-24(b) 中四个力关系的矢量表达式 _____;

图 2-24(c) 中四个力关系的矢量表达式 _____。

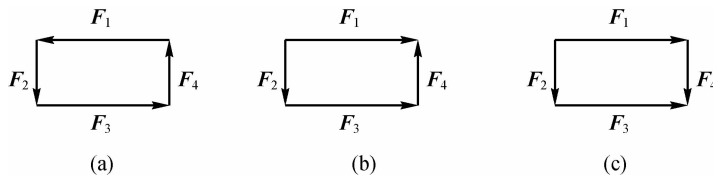


图 2-24

二、判断题

- () 1. 两个力 F_1, F_2 在同一轴上的投影相等, 则这两个力一定相等。
- () 2. 两个大小相等的力, 在同一轴上的投影也一定相等。
- () 3. 力 F 在某轴上的投影为零, 则该力不一定为零。
- () 4. 用解析法求解平面汇交力系的平衡问题时, 投影轴的方位不同, 平衡方程的具体形式也不同, 但计算结果不变。
- () 5. 平面汇交力系平衡时, 力多边形各力首尾相接, 但在作力多边形时各力的顺序可以不同。
- () 6. 用解析法求解平面汇交力系平衡问题时, 所选取的两个投影轴必须相互垂直。
- () 7. 当平面汇交力系平衡时, 选择几个投影轴就能列出几个独立的平衡方程。

三、计算题

1. 在图 2-25 所示刚架的点 B 作用一水平力 F , 刚架重量略去不计, 分别用几何法和解析法求支座 A, D 处的约束力。

2. 物体重 $P = 20 \text{ kN}$, 用绳子挂在支架的滑轮 B 上, 绳子的另一端接在铰轮 D 上, 如图 2-26 所示。设滑轮 B 的大小、杆 AB 与 BC 自重不计, 忽略各处的摩擦, A, B, C 处均为铰链连接。当物体处于平衡状态时, 求杆 AB 和杆 BC 所受的力。

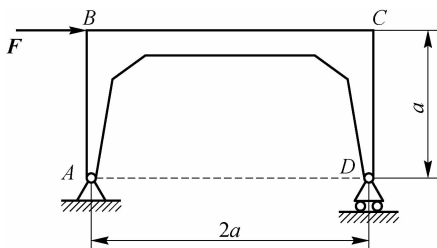


图 2-25

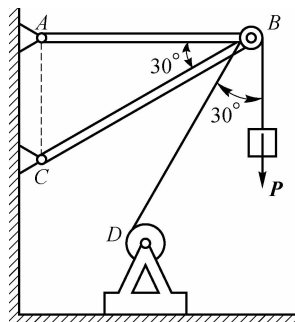


图 2-26

3. 图 2-27 所示液压夹紧机构中, D 为固定铰支座, B 为活动铰支座, C, E 为光滑铰链。已知力 F , 机构平衡时角度如图所示, 各构件自重不计, 求此时工件 H 所受的挤压力。

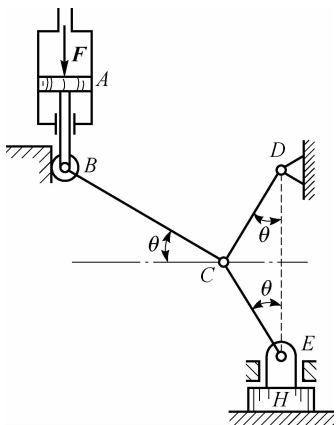


图 2-27

习题(二)

一、填空题

1. 力对刚体产生转动效应可用_____度量,力的作用线到矩心的垂直距离称为_____,力对点之矩与矩心的选取_____关。
2. 平面内力对点的矩是_____量,正负号由_____确定。
3. _____是力偶对物体作用的唯一度量。
4. 同一平面内的两个力偶,只要_____相等,则两力偶彼此等效。
5. 力偶的两个力在任一坐标轴上投影的代数和等于_____,它对平面内任一点的矩等于力偶矩,力偶矩与矩心的位置_____。
6. 在平面内只要保持_____和_____不变,可以同时改变力偶中力的大小和力偶臂的长短,则力偶对_____的作用效果不变。
7. 同一平面内的任意个力偶可以合成为_____或_____。
8. 力偶可以在_____任意移转,而不改变它对刚体的作用。
9. 直角折杆重量不计,其上作用一力偶矩为 M 的力偶,则图 2-28(a)中 B 处的约束力大小为_____。图 2-28(b)中 B 处的约束力大小为_____。
10. 已知杆 AB 和杆 CD 的重量不计,且在 C 处光滑接触,若作用在杆 AB 上的力偶矩为 M_1 ,则欲使系统保持平衡,作用在 CD 杆上的力偶矩 M_2 转向如图 2-29 所示,其力偶矩 $M_2 =$ _____。

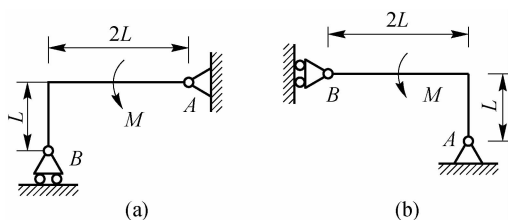


图 2-28

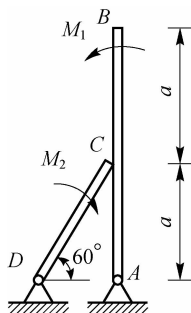


图 2-29

二、判断题

- () 1. 力矩与矩心的位置有关,而力偶矩与矩心的位置无关。
- () 2. 力偶对其作用面内任一点之矩都等于其力偶矩。
- () 3. 平面中任意两个力都可以简化为一个合力。
- () 4. 如图 2-30 所示三铰拱,在 CB 上作用一力偶矩为 M 的力偶。当求铰链 A 、 B 、 C 的约束力时,可将力偶 M 移至 AC 上。
- () 5. 如图 2-31 所示矩形平板上作用一力偶矩为 M 的力偶,在两光滑槽内插入两固定的销钉 A 、 B ,则平板一定保持平衡。

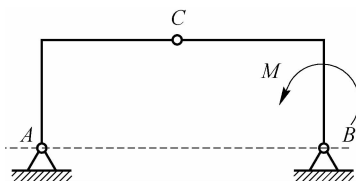


图 2-30

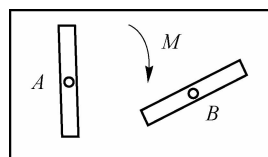


图 2-31

三、计算题

1. 试计算图 2-32 中力对点 O 的矩。

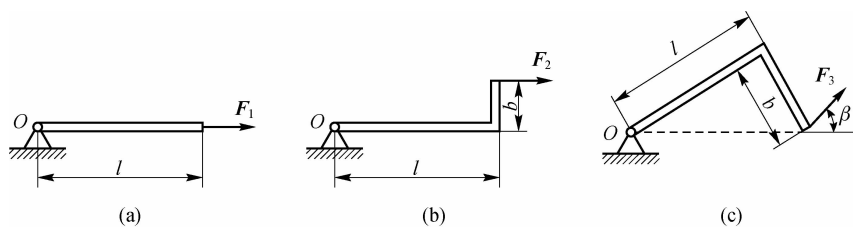


图 2-32

$$M_O(\mathbf{F}_1) = \underline{\hspace{2cm}}; M_O(\mathbf{F}_2) = \underline{\hspace{2cm}}; M_O(\mathbf{F}_3) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

2. 在图 2-33 所示结构中, 不计各杆自重及各处摩擦, 杆 AB 长 $2l$, 在其中点 C 处有曲杆 CD 支承, 若 $AD=AC=l$, 且受矩为 M 的平面力偶作用, 试求图中 A 处约束力的大小。

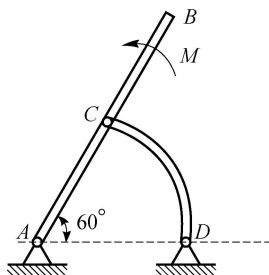


图 2-33

3. 在图 2-34(a) 所示机构中, 杆 AB 上有一导槽, 套在杆 CD 的销子 E 上, 杆 AB 与 CD 上各作用一力偶, 在图示位置平衡。已知 $M_1 = 100 \text{ N} \cdot \text{m}$, $l = 1 \text{ m}$, 求 M_2 。而在图 2-34(b) 所示机构中, 导槽在杆 CD 上, 销子 E 在 AB 上, 求 M_2 。

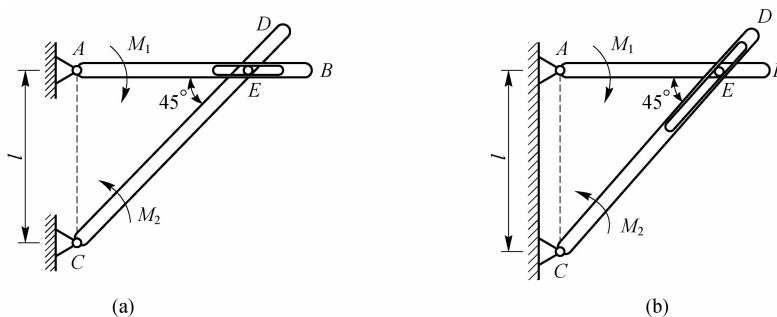


图 2-34

第一篇 静力学

4. 在图 2-35 所示机构中, 杆 OA 上作用一力偶, 其矩为 M , 另在滑块 D 上作用水平力 F 。机构尺寸如图所示, 各杆重量不计。求当机构平衡时, 力 F 与力偶矩 M 的关系。

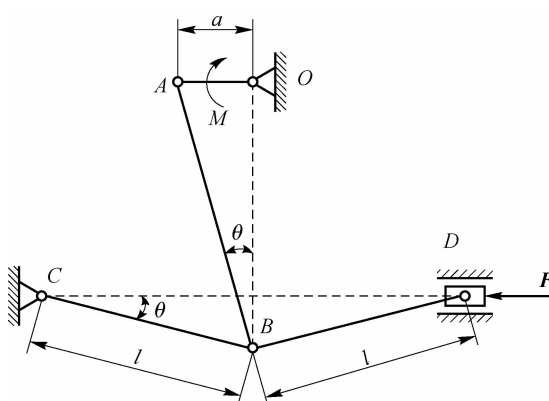


图 2-35

第 3 章

平面任意力系

平面任意力系是指各力作用线在同一平面内且任意分布的力系。

在工程实际问题中,物体的受力状况往往比较复杂,受平面任意力系作用的物体并不多见。但可将所研究的问题适当简化,按物体受平面任意力系来处理。本章将在前面两章的基础上,详述平面任意力系的简化与平衡问题。本章是静力学的核心内容,采用的研究方法具有普遍意义。

3.1 平面任意力系向作用面内一点简化

力的平行四边形法则可用于简化汇交于同一点的力系,但对平面任意力系的简化效果并不显著。下面介绍平面任意力系向作用面内一点简化的方法,此方法的理论基础是力的平移定理。

3.1.1 力的平移定理

定理:作用在刚体上点 A 的力 $\boldsymbol{F}$ 可以平行移到刚体上任一点 B ,但同时附加一个力偶,这个附加力偶的矩等于原来的力 $\boldsymbol{F}$ 对新作用点 B 的矩。

证明:如图 3-1(a)所示,作用在刚体上任意点 A 的力 $\boldsymbol{F}$,现要将其等效地平移至刚体上任一点 B 。由加减平衡力系原理,在点 B 加一对平衡力 $\boldsymbol{F}'$ 和 $\boldsymbol{F}''$,令 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}'=-\boldsymbol{F}''$,如图 3-1(b)所示。显然,这三个力组成的力系与原力 $\boldsymbol{F}$ 等效,此力系亦可视为作用于 B 点的一个力 $\boldsymbol{F}'$ 和一个力偶 $(\boldsymbol{F}', \boldsymbol{F}'')$,该力偶称为附加力偶,其附加力偶之矩为

$$M = Fd = M_B(\boldsymbol{F})$$

则力 $\boldsymbol{F}$ 平行移至另一点 B ,如图 3-1(c)所示。

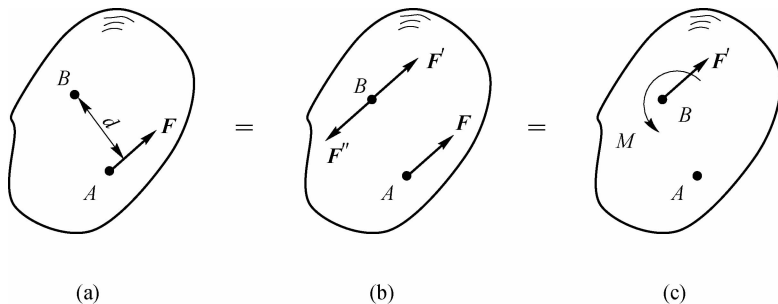


图 3-1

逆定理:作用在刚体上同平面内的一个力和一个力偶,可与一个力等效,此力为原来力系的合力。

力的平移定理不仅是力系简化的依据,而且可用来分析实际问题。例如,立柱基础偏心受压,偏心距为 e ,如图 3-2(a)所示,若将力 F 平移到立柱轴线,需在轴线上作用一个力 F' ,同时附加力偶矩 $M = -Fe$ 的一个力偶,如图 3-2(b)所示。显然,轴向力 F' 使立柱压缩,力偶矩 M 使立柱弯曲。

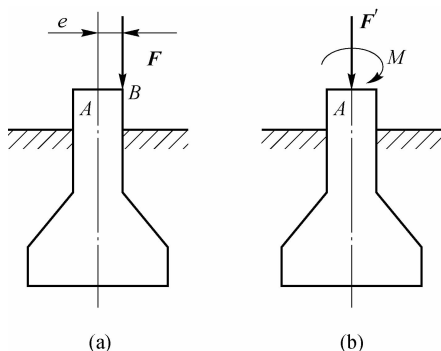


图 3-2

3.1.2 平面任意力系向作用面内一点简化·主矢和主矩

设刚体受平面任意力系作用,此力系由 $F_1, F_2, \dots, F_n$ 共 n 个力组成,如图 3-3(a)所示。在力系作用平面内任选一点 O ,将力系向 O 点简化,并称点 O 为简化中心。按力的平移定理,将力系中各力矢量向 O 点平移,如图 3-3(b)所示。得到作用于简化中心 O 点的平面汇交力系 $F'_1, F'_2, \dots, F'_n$,其中

$$F'_i = F_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

此外,还应附加相应的力偶,各附加力偶之矩为 $M_1, M_2, \dots, M_n$,分别等于原力系中各力对简化中心 O 之矩,即

$$M_i = M_O(F_i) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

因此,平面任意力系等效为两个简单力系:平面汇交力系和平面力偶系。

平面汇交力系 $F'_1, F'_2, \dots, F'_n$ 可合成为作用线通过简化中心 O 点的一个力 F_R ,即

$$F_R = F'_1 + F'_2 + \dots + F'_n = F_1 + F_2 + \dots + F_n$$

$$F'_R = \sum_{i=1}^n F_i \quad (3-1)$$

力 F'_R 称为原平面任意力系的主矢,即力矢 F'_R 等于原力系各力的矢量和。

由附加力偶所组成的平面力偶系可简化为一力偶,此力偶的矩以 M_O 表示,有

$$M_O = M_1 + M_2 + \dots + M_n = M_1(F_1) + M_2(F_2) + \dots + M_n(F_n)$$

即

$$M_O = \sum_{i=1}^n M_O(F_i) \quad (3-2)$$

此力偶矩称为原力系的主矩,即主矩 M_O 等于原力系中各力对简化中心 O 之矩代数和。

可见,平面任意力系向作用面内任一点简化,得到一个力和一个力偶,如图 3-3(c)所示。这个力称为该力系的主矢,作用线过简化中心,主矢与简化中心的位置无关;这个力偶的矩

称为该力系对简化中心的主矩,主矩一般与简化中心的位置有关。

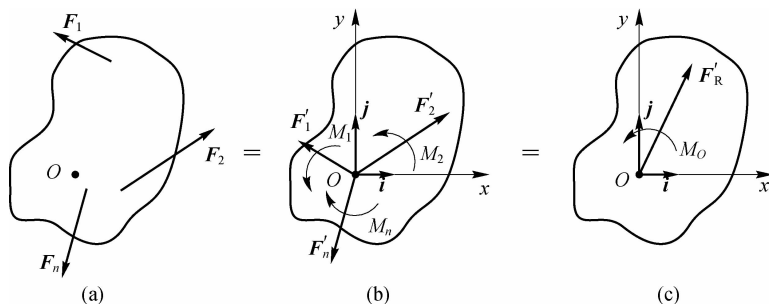


图 3-3

如图 3-3(c)所示,力系主矢的解析法表达式为

$$\mathbf{F}'_R = \mathbf{F}'_{Rx} + \mathbf{F}'_{Ry} = \sum F'_x \mathbf{i} + \sum F'_y \mathbf{j} = \sum F_x \mathbf{i} + \sum F_y \mathbf{j} \quad (3-3)$$

主矢的大小 $F'_R = \sqrt{(\sum F'_x)^2 + (\sum F'_y)^2} = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2}$

主矢的方向余弦 $\cos(\mathbf{F}'_R, \mathbf{i}) = \frac{\sum F_x}{F'_R}, \quad \cos(\mathbf{F}'_R, \mathbf{j}) = \frac{\sum F_y}{F'_R}$

现用力系向一点简化的方法,分析固定端(插入端)支座的约束反力。

如图 3-4(a)、图 3-4(b)所示,车刀和工件分别夹持在刀架与卡盘上固定不动,这种约束为固定端或插入端约束,其简图如图 3-4(c)所示。

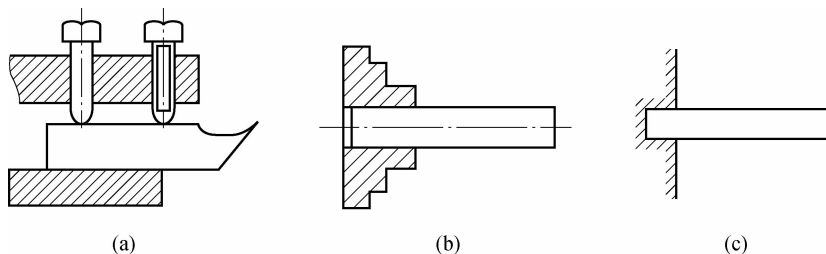


图 3-4

固定端约束是工程中常见的约束,除上述刀架、卡盘外,还有埋入地基中的电线杆及悬臂梁。固定端约束对物体的作用,是在接触面上作用了一群约束反力。在平面问题中,这些力为平面任意力系,如图 3-5(a)所示。这种约束既限制物体在约束处沿任何方向的移动,也限制物体在约束处的转动。

依据平面任意力系的简化理论,将固定端处的约束力向固定端点 A 简化,得到一个力 $\mathbf{F}_A$ 和一个力偶 M_A ,如图 3-5(b)所示。由于力 $\mathbf{F}_A$ 方向未知,通常将其分解为两个正交分力 $\mathbf{F}_{Ax}$ 和 $\mathbf{F}_{Ay}$ 。因此,固定端处约束力简化为两个约束力 $\mathbf{F}_{Ax}$ 和 $\mathbf{F}_{Ay}$ 及一个矩为 M_A 的约束力偶,如图 3-5(c)所示。

此外,要注意区分固定端约束和固定铰链支座。固定端约束除了限制物体在水平方向和铅垂方向的移动外,还能限制物体在平面内的转动;而固定铰链支座没有约束力偶,不能限制物体在平面内的转动。

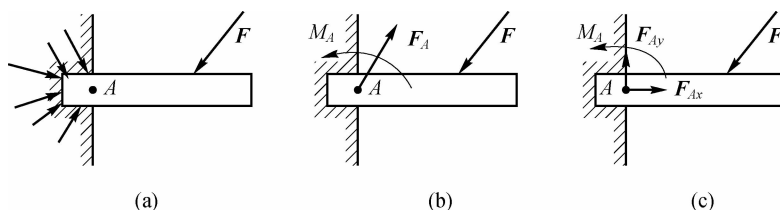


图 3-5

3.1.3 平面任意力系简化结果的分析

平面任意力系向其作用面内任意一点简化的结果,可能有四种情况:① $\mathbf{F}'_R=0, M_O \neq 0$; ② $\mathbf{F}'_R \neq 0, M_O = 0$; ③ $\mathbf{F}'_R \neq 0, M_O \neq 0$; ④ $\mathbf{F}'_R = 0, M_O = 0$ 。下面对这四种情况做进一步分析,可归结为以下三种结果:

1. 平面任意力系简化为一个合力偶

当 $\mathbf{F}'_R=0, M_O \neq 0$ 时,说明原平面任意力系与一个平面力偶系等效,其简化结果为一个合力偶,该合力偶的矩等于主矩, $M=M_O = \sum M_O(\mathbf{F}_i)$ 。由于力偶与矩心位置无关,故在此特殊情况下,主矩与简化中心的位置无关。

2. 平面任意力系简化为一个合力

当 $\mathbf{F}'_R \neq 0, M_O = 0$ 时,说明原平面任意力系与平面汇交力系等效,其简化结果为一个合力 $\mathbf{F}'_R$,而合力的作用线恰好通过简化中心 O 。

当 $\mathbf{F}'_R \neq 0, M_O \neq 0$ 时,可利用力的平移定理的逆定理。先将图 3-6(a)简化所得的主矩改变形式,使之成为一个力偶 $(\mathbf{F}_R, \mathbf{F}_R')$,如图 3-6(b)所示。 $\mathbf{F}_R = \mathbf{F}'_R = -\mathbf{F}_R'$,且 $\mathbf{F}_R$ 与 $\mathbf{F}_R'$ 共线。显然, $\mathbf{F}_R$ 与 $\mathbf{F}_R'$ 为一对平衡力系,可从力系中去掉,而不改变其作用效果。于是就将作用于点 O 的力 $\mathbf{F}'_R$ 和力偶 $(\mathbf{F}_R, \mathbf{F}_R')$ 合成为一个作用在点 O' 的合力 $\mathbf{F}_R$,如图 3-6(c)所示。此合力的力矢 $\mathbf{F}_R$ 等于力系的主矢 $\mathbf{F}'_R$,但合力并不作用于简化中心 O 点,而是作用于图 3-6(c)所示的 O' 点,合力的作用线到 O 点距离为

$$d = \left| \frac{M_O}{F'_R} \right|$$

结论,平面任意力系向一点简化,不论主矩是否等于零,只要主矢不等于零,此力系最终可以简化为一个合力。

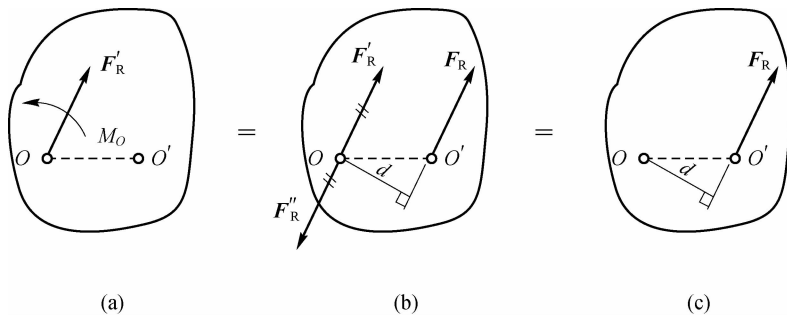


图 3-6

3. 平面任意力系平衡

$F'_R=0, M_O=0$, 则原力系平衡。

例 3-1 已知 $F_1=2\text{ kN}$, $F_2=4\text{ kN}$, $F_3=10\text{ kN}$, 分别作用在边长为 a (单位为 m) 的正方形 $OABC$ 所在平面内的 C 、 O 、 B 三点, 如图 3-7(a) 所示, 试求力系的简化结果。

解 (1) 取 O 点为简化中心, 建立正交直角坐标系 Oxy , 如图 3-7(b) 所示。力系的主矢 F'_R 在 x 、 y 轴上的投影为

$$F'_{Rx} = \sum F_x = -F_1 + F_3 \cdot \frac{3}{5} = -2\text{ kN} + 10\text{ kN} \times \frac{3}{5} = 4\text{ kN}$$

$$F'_{Ry} = \sum F_y = -F_2 + F_3 \cdot \frac{4}{5} = -4\text{ kN} + 10\text{ kN} \times \frac{4}{5} = 4\text{ kN}$$

主矢的大小 $F'_R = \sqrt{F'^2_{Rx} + F'^2_{Ry}} = 4\sqrt{2}\text{ kN}$

主矢的方向 $\angle(F'_R, i) = 45^\circ$

力系对简化中心 O 点的主矩 M_O 为

$$\begin{aligned} M_O &= \sum_{i=1}^n M_O(F_i) = F_1 \cdot a + F_3 \cdot \frac{4}{5} \cdot a - F_3 \cdot \frac{3}{5} \cdot a \\ &= 4a\text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

力系向 O 点简化结果为主矢 F'_R 和主矩 M_O , 方向如图 3-7(b) 所示。

(2) 求合力作用线的位置。

F'_R 和 M_O 均不等于零, 可进一步合成为一个合力 F_R , 其大小与主矢 F'_R 相等, 方向相同, 合力作用线到简化中心 O 的垂直距离

$$d = \frac{M_O}{F'_R} = \frac{a}{\sqrt{2}}\text{ m}$$

简化结果如图 3-7(c) 所示。

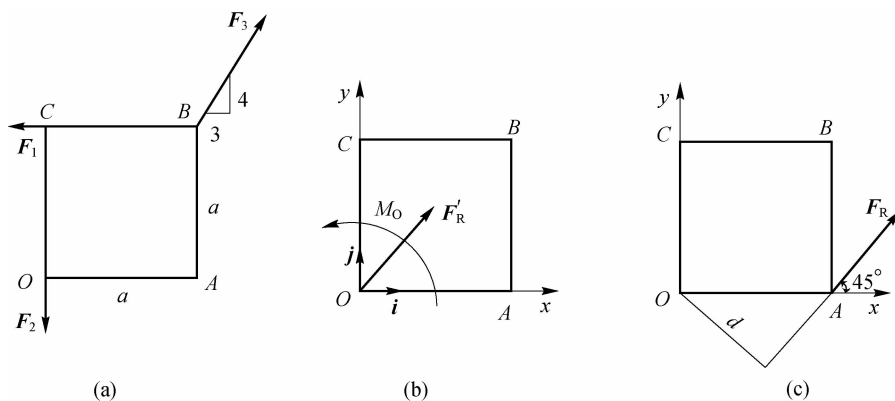


图 3-7

3.2 平面任意力系的平衡

3.2.1 平面任意力系的平衡条件·平衡方程

平面任意力系平衡的充分必要条件: 力系的主矢和对任意点的主矩均等于零。即

$$\mathbf{F}'_R = 0, \quad M_O = 0 \quad (3-4)$$

显然,主矢等于零,表明作用于简化中心 O 的汇交力系为平衡力系;主矩等于零,表明附加力偶矩也是平衡力系,所以原力系必为平衡力系。因此,式(3-4)为平面任意力系平衡的充分条件。

若主矢和主矩有一个不等于零,则力系应简化为合力或合力偶;若主矢和主矩都不等于零时,可进一步简化为一个合力。上述情况下力系都不能平衡,只有当主矢和主矩都等于零时,力系才能平衡。

这些平衡条件可用解析式(一矩式)表示

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M_O(\mathbf{F}_i) = 0 \quad (3-5)$$

式(3-5)称为平面任意力系的平衡方程。由此,平面任意力系平衡的解析条件:所有力在两个任选的坐标轴上的投影的代数和分别等于零,各力对于任意一点的矩的代数和也等于零。

例 3-2 如图 3-8(a)所示, q 为均布载荷集度,单位为 kN/m ,设集中力 $F=ql$,集中力偶矩 $M=ql^2$ 。试求悬臂梁固定端 A 的约束反力。

解 (1)取 AB 为研究对象,画出受力图如图 3-8(b)所示。

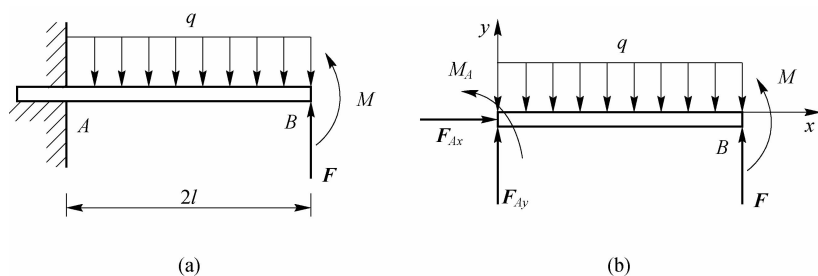


图 3-8

固定端 A 处除了约束反力 $\mathbf{F}_{Ax}$ 、 $\mathbf{F}_{Ay}$ 以外,还有约束反力偶 M_A 。

列平衡方程时应注意,力偶对任意轴的投影均为零,力偶对作用面内任意点之矩恒为该力偶矩。

(2)建立坐标系,列平衡方程。

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ay} + F - q \cdot 2l = 0$$

$$\sum M_A(\mathbf{F}) = 0, \quad M_A - 2ql \cdot l + M + F \cdot 2l = 0$$

$$\text{得 } F_{Ax} = 0, \quad F_{Ay} = ql, \quad M_A = -ql^2.$$

M_A 计算结果为负值,说明实际转向与图示转向相反,即应顺时针转向。

例 3-3 如图 3-9(a)所示的简支梁 AB , A 端为固定铰链支座, B 端为可动铰链支座。梁的长度为 $4a$,梁重 $\mathbf{P}$,作用在梁的中点 C 。梁的 AC 段上受均布载荷 q 作用,梁的 BC 上受外力偶作用,力偶矩 $M=Pa$ 。试求 A 和 B 处的支座反力。

解 (1)取简支梁 AB 为研究对象。梁所受的主动力有均布载荷 q 、重力 $\mathbf{P}$ 和矩为 M 的力偶;所受的约束力:铰链 A 的两个分力 $\mathbf{F}_{Ax}$ 和 $\mathbf{F}_{Ay}$,可动铰链支座 B 处垂直向上的约束反力 $\mathbf{F}_B$ 。 AB

的受力图如图 3-9(b)所示。

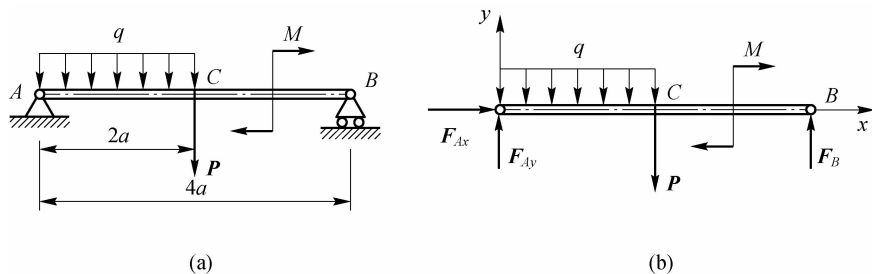


图 3-9

(2) 建立正交直角坐标系, 列平衡方程, 得

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ay} - q \cdot 2a - P + F_B = 0$$

$$\sum M_A(\mathbf{F}) = 0, \quad F_B \cdot 4a - M - P \cdot 2a - q \cdot 2a \cdot a = 0$$

$$\text{得 } F_{Ax} = 0, \quad F_{Ay} = \frac{P}{4} + \frac{3}{2}qa, \quad F_B = \frac{3}{4}P + \frac{1}{2}qa。$$

3.2.2 平面任意力系平衡方程的其他形式

1. 二矩式平衡方程

$$\sum F_x = 0, \quad \sum M_A(\mathbf{F}) = 0, \quad \sum M_B(\mathbf{F}) = 0 \quad (3-6)$$

适用条件: x 轴不能与 A 、 B 两点连线垂直。

下面论证二矩式平衡方程也能满足力系平衡的必要和充分条件。

证明: 如果力系对点 A 的主矩等于零, 则这个力系不能简化为一个力偶, 但可能有两种情形: 这个力系或者简化为经过点 A 的一个力; 力系平衡。如果力系对另一点 B 的主矩也同时等于零, 则这个力系可简化为沿 A 、 B 两点连线的一个合力, 或者平衡。如果再加上 $\sum F_x = 0$, 那么力系如有合力(合力不为零), 则此合力必与 x 轴垂直。而附加条件(x 轴不能与 A 、 B 两点连线垂直)完全排除了力系简化为一个合力的可能性, 故所研究的力系必为平衡力系。

2. 三矩式平衡方程

$$\sum M_A(\mathbf{F}) = 0, \quad \sum M_B(\mathbf{F}) = 0, \quad \sum M_C(\mathbf{F}) = 0 \quad (3-7)$$

适用条件: A 、 B 、 C 三点不能共线。学生可自行证明。

例 3-4 十字梁用三个链杆支座固定, 如图 3-10(a)所示。试求在水平力 $\mathbf{F}$ 作用下, 各支座的约束反力。

解 (1) 取十字梁为研究对象。其上所受主动力为 $\mathbf{F}$, 约束反力为各链杆的支座反力 $\mathbf{F}_A$ 、 $\mathbf{F}_B$ 和 $\mathbf{F}_C$ 。十字梁受力如图 3-10(b)所示。

(2) 列平衡方程。分别取反力 $\mathbf{F}_B$ 和 $\mathbf{F}_C$ 的交点 H 及 B 点为矩心, 用二矩式平衡方程求解

$$\sum F_y = 0, \quad F_B - F_A \cos 30^\circ = 0$$

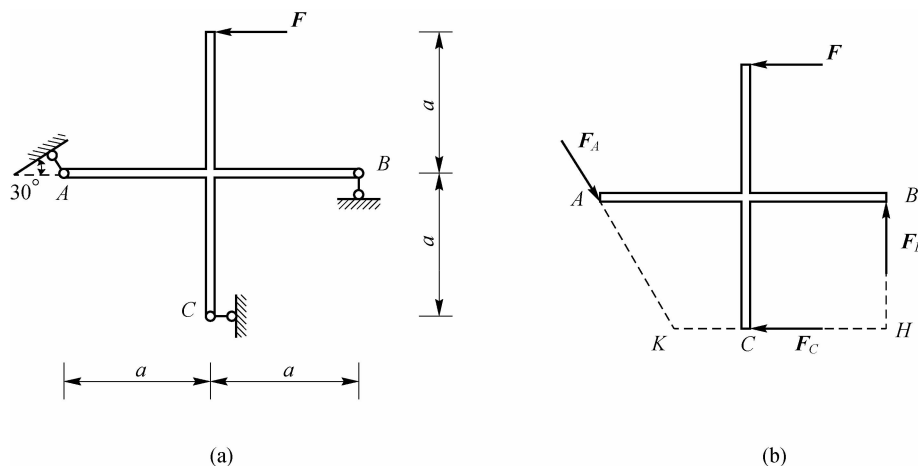


图 3-10

$$\sum M_H(\mathbf{F})=0, \quad F \cdot 2a + F_A \cdot 2a \cdot \cos 30^\circ - F_A \cdot a \cdot \sin 30^\circ = 0$$

$$\sum M_B(\mathbf{F})=0, \quad F \cdot a - F_C \cdot a + F_A \cdot 2a \cdot \cos 30^\circ = 0$$

$$\text{得 } F_A = -\frac{4(1+2\sqrt{3})}{11}F \approx -1.62F, \quad F_B = -\frac{2(6+\sqrt{3})}{11}F \approx -1.41F,$$

$$F_C = -\frac{13+4\sqrt{3}}{11}F \approx -1.81F.$$

例 3-5 如图 3-11(a)所示,边长为 a 的等边三角形平板 ABC 在垂直平面内,用三根沿边长方向的直杆铰接, CF 杆水平,三角形平板上作用一已知力偶,其力偶矩为 M ,三角形平板重为 P ,略去杆重,试求三杆对三角形平板的约束反力。

解 (1)取三角形平板 ABC 为研究对象,受力如图 3-11(b)所示。显然,作用于三角形平板上的力系是平面任意力系,且未知力的分布比较特殊,其特点是: A 、 B 、 C 三点分别是三个未知约束反力的汇交点。因此,宜用三矩式平衡方程求解。

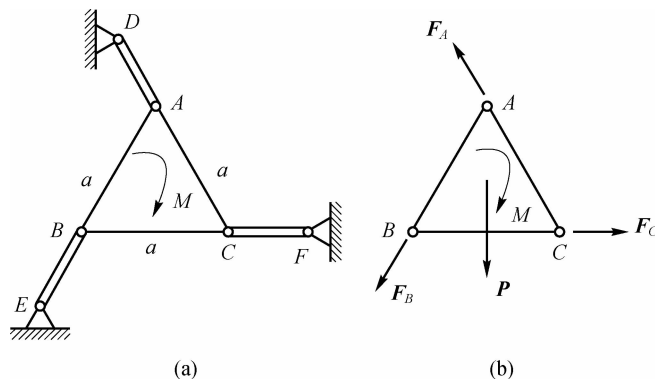


图 3-11

(2)列平衡方程。

$$\sum M_A(\mathbf{F})=0, \quad \frac{\sqrt{3}}{2}a \times F_C - M = 0, \quad \text{得 } F_C = \frac{2\sqrt{3}M}{3a}.$$

$$\sum M_B(\mathbf{F})=0, \quad \frac{\sqrt{3}}{2}a \times F_A - M - P \times \frac{a}{2} = 0, \quad \text{得 } F_A = \frac{2\sqrt{3}M}{3a} + \frac{\sqrt{3}}{3}P。$$

$$\sum M_C(\mathbf{F})=0, \quad \frac{\sqrt{3}}{2}a \times F_B - M + P \times \frac{a}{2} = 0, \quad \text{得 } F_B = \frac{2\sqrt{3}M}{3a} - \frac{\sqrt{3}}{3}P。$$

3.2.3 平面平行力系的平衡方程

平面平行力系是力系中各力的作用线在同一平面内,且相互平行的力系。

平面平行力系可以作为平面任意力系的特例。假设各力作用线垂直于 x 轴,平行于 y 轴,此时,无论平面平行力系是否平衡,方程 $\sum F_x = 0$ 皆能满足。因此,平面平行力系的独立平衡方程数目只有两个,即

$$\sum F_y = 0, \quad \sum M_O(\mathbf{F}) = 0 \quad (3-8)$$

平面平行力系的平衡方程也有两个矩方程的形式,即

$$\sum M_A(\mathbf{F}) = 0, \quad \sum M_B(\mathbf{F}) = 0 \quad (3-9)$$

其中, A 、 B 两点的连线不能与力的作用线平行。

3.3 物体系统的平衡、静定与超静定问题

3.3.1 物体系统的平衡

物体系统是指若干个物体通过适当的约束相互连接而组成的系统。

当整个物体系统处于平衡状态时,组成该系统的每一个物体必然处于平衡。此时可选取整个物体系统作为研究对象,也可将整个物体系统拆开,取系统的局部作为研究对象。

无论如何选取研究对象,在平面任意力系作用下, n 个物体所组成的系统仅能列出 $3n$ 个独立平衡方程,求解 $3n$ 个未知量。若系统受平面汇交力系或平面平行力系作用,独立的平衡方程数目会相应减少。按上述方法求解物体系统的平衡问题理论上并无困难,但在实际问题中,并不要求解全部未知量。如何针对具体问题选择简捷有效的解题途径,是本节实例重点要解决的问题。

例 3-6 组合梁由 AB 和 BC 在 B 处铰接而成, A 处为固定端约束, C 为滚动支座。已知 $F=10 \text{ kN}$, $q=20 \text{ kN/m}$, $M=10 \text{ kN} \cdot \text{m}$, 几何尺寸如图 3-12(a) 所示, 试求 A 、 C 处的约束力。

解 若取整体为研究对象,能列出 3 个独立的平衡方程,而固定端 A 处有 3 个未知量 F_{Ax} 、 F_{Ay} 和 M_A , C 处有 1 个法向约束力 F_C , 共计 4 个未知量,不能直接求出全部未知量。

若先取 BC 为研究对象,列出 3 个独立的平衡方程,而 B 处未知约束力有 2 个, C 处未知约束力有 1 个,若对点 B 取矩,可求出 F_C ;再取整体为研究对象,即可求出固定端 A 处的 3 个约束力。

(1)取梁 BC 为研究对象,受力如图 3-12(b) 所示。主动力有力偶 M 和均布载荷 q , 约束力有 B 处的两个正交分力 F_{Bx} 、 F_{By} 及 C 处的法向约束力 F_C , 列平衡方程

$$\sum M_B(\mathbf{F})=0, \quad F_C \cdot 6 \text{ m} + M - q \cdot 3 \text{ m} \cdot \left(3 \text{ m} + \frac{3}{2} \text{ m}\right) = 0$$

$$\text{得 } F_C = \frac{130}{3} \text{ kN} \approx 43.33 \text{ kN}。$$

第一篇 静力学

(2)取组合梁整体为研究对象,受力如图 3-12(c)所示。主动力有集中力 F 、力偶 M 和均布载荷 q ,约束力有固定端处的两个正交分力 F_{Ax} 、 F_{Ay} 和约束力偶 M_A 及 C 处的法向力 F_C 。

列平衡方程

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ay} - q \cdot 3 \text{ m} - F + F_C = 0$$

$$\sum M_A(F) = 0, \quad M_A - F \cdot 2 \text{ m} + M - q \cdot 3 \text{ m} \cdot \left(7 \text{ m} + \frac{3}{2} \text{ m}\right) + F_C \cdot 10 \text{ m} = 0$$

得 $F_{Ax} = 0$, $F_{Ay} = \frac{80}{3} \text{ kN} \approx 26.67 \text{ kN}$, $M_A = \frac{260}{3} \text{ kN} \cdot \text{m} \approx 86.67 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 。

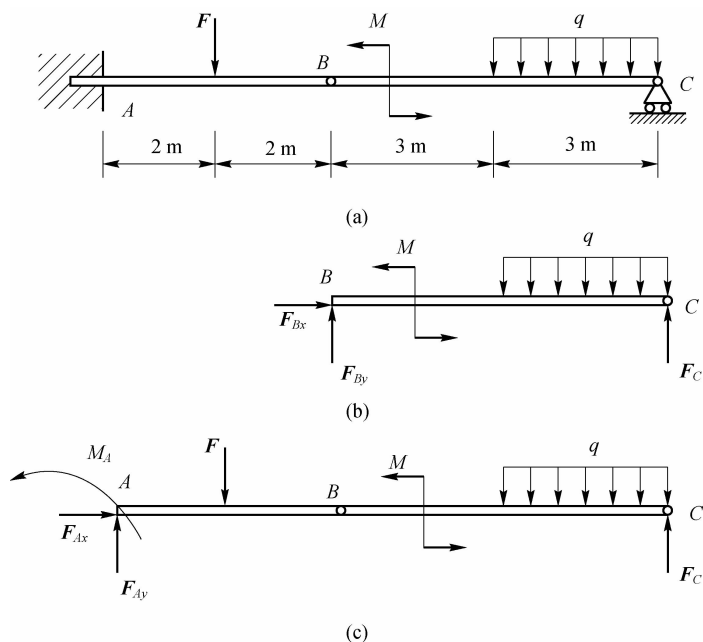


图 3-12

例 3-7 如图 3-13(a)所示结构,由杆 AB 、 BC 、 CD 、圆轮 O 、绳索和物块 E 组成。圆轮与杆 CD 用铰链连接,圆轮半径 $r = \frac{l}{2}$,物块 E 重量为 P ,其他杆件自重不计。试求固定端 A 处约束反力。

解 (1)取杆 CD 、圆轮、绳索及物块 E 所组成的系统为研究对象,受力如图 3-13 (b)所示,列平衡方程

$$\sum M_D(F) = 0, \quad F_C \cdot 2l + F_T \cdot 1.5l - P \cdot \frac{l}{2} = 0$$

其中 $F_T = P$, 得 $F_C = -\frac{P}{2}$ 。

(2)取杆 AB 为研究对象,受力如图 3-13 (c)所示,列平衡方程

$$\sum F_x = 0, \quad F_B + F'_T + F_{Ax} = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ay} = 0$$

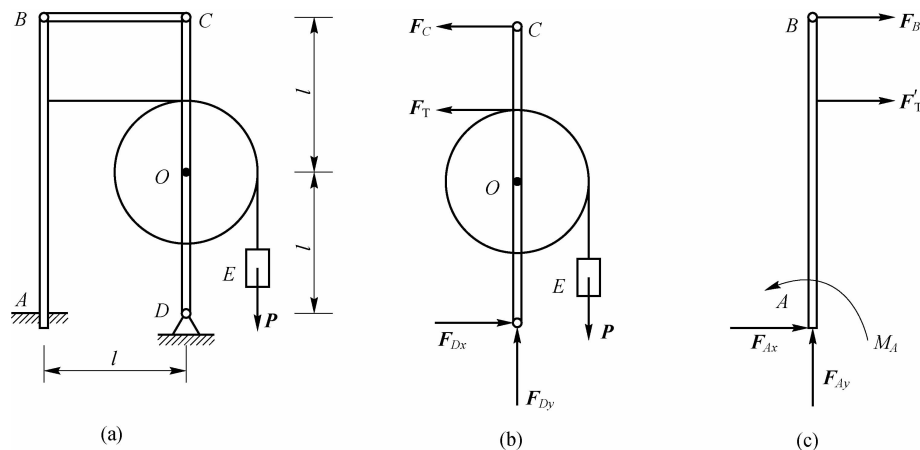


图 3-13

$$\sum M_A(F) = 0, \quad M_A - F_B \cdot 2l - F'_T \cdot \frac{3}{2}l = 0$$

$$\text{其中, } F_B = -F_C, \text{ 得 } F_{Ax} = -\frac{1}{2}P, \quad F_{Ay} = 0, \quad M_A = \frac{1}{2}Pl$$

此题亦可先取杆 CD、圆轮、绳索及物块 E 所组成的系统为研究对象,再取整体为研究对象,建议自行完成。

3.3.2 静定与超静定问题

在求解单个刚体或物体系统的平衡问题时,如果研究对象在平面任意力系作用下平衡,则可有 3 个独立的平衡方程,只能求解出 3 个未知量。平面汇交力系和平面平行力系只有两个独立的平衡方程,因此,对每一个力系来说,能求解的未知量的数目是一定的。若未知量的数目小于或等于独立平衡方程的数目,则应用刚体静力学的理论就可以求出全部的未知量,这种问题称为**静定问题**。若未知量的数目超过独立平衡方程的数目,单独应用刚体静力学的理论不能求出全部的未知量,这样的问题称为**超静定问题**。未知量数目与独立平衡方程数目差值称为**超静定次数**。

判断系统静定与否的方法:将系统全部拆成单个物体,计算未知量的总数目与独立平衡方程的总数目,并加以比较。

注意:作用力与反作用力大小相等,不同力系有不同的独立平衡方程数目。

在求解静力学问题时,应先判断问题的静定性。即在画完受力图后,判断能否仅用刚体静力学方法求解全部未知量,避免解题盲目性。下面列举部分静定和超静定问题实例。

如图 3-14(a)所示用两根绳子悬挂一重物,未知约束反力有 2 个,而重物受平面汇交力系的作用,有 2 个平衡方程,属静定问题。如果用 3 根绳子悬挂重物,如图 3-14(b)所示,则未知约束反力为 3 个,而平衡方程只有 2 个,属一次超静定问题。如图 3-14(c)所示,两个轴承支承一根轴,未知约束反力有 2 个,轴受平面平行力系作用,有 2 个平衡方程,属静定问题。若用 3 个轴承支承,如图 3-14(d)所示,则未知约束反力为 3 个,而平衡方程只有 2 个,属一次超静定问题。

物体系统的平衡问题,其静定性的判定要复杂一些,但原理不变。设物体系统中有 n_1

第一篇 静力学

个物体受平面任意力系, n_2 个物体受平面汇交力系或平面平行力系, n_3 个物体受平面力偶系作用, 则整个系统的独立平衡方程数目

$$m = 3n_1 + 2n_2 + n_3$$

设系统未知量的总数为 n , 则 $n \leq m$ 时为静定问题, $n > m$ 时为超静定问题。

如图 3-14(e) 所示的拱由两部分组成, 受平面任意力系作用, 每部分有 3 个独立平衡方程, 共有 6 个独立平衡方程, 而 A 端为固定端约束, 未知量数目为 7 个, 因此是一次超静定的问题。

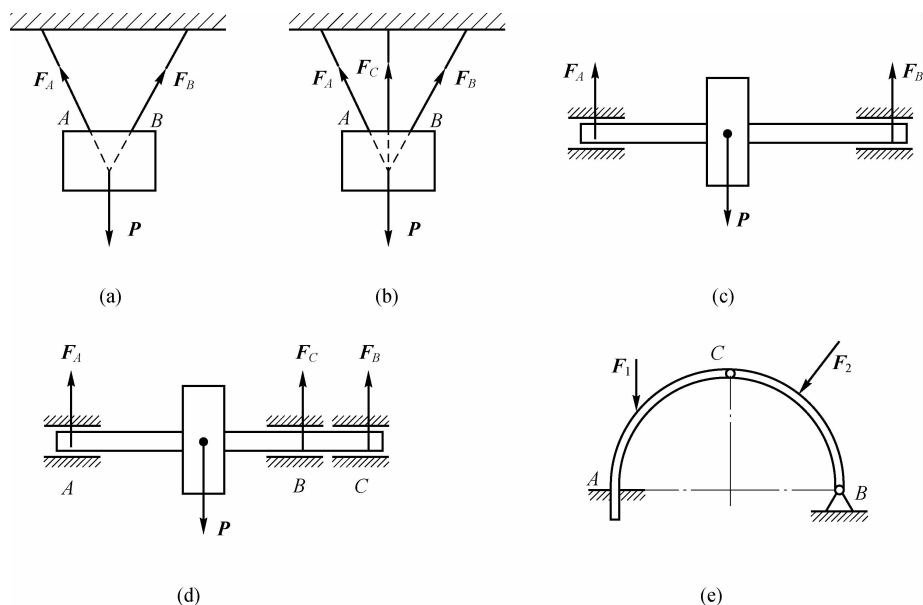


图 3-14

注意: 超静定问题并不是不能求解的, 只是不能仅用静力学平衡方程来求解。

小 结

(1) 力的平移定理: 作用在刚体上点 A 的力 F 可以平行移到刚体上任意点 B, 但必须同时附加一个力偶, 这个附加力偶的矩等于原来的力 F 对新作用点 B 的矩。此定理是力系向一点简化的理论依据。

(2) 平面任意力系向平面内任一点 O 简化, 通常得到一个力和一个力偶, 此力称为原来力系的主矢, 与简化中心的位置无关; 此力偶的矩称为原来力系的主矩, 一般与简化中心的位置有关。

$$\text{主矢: } \mathbf{F}'_R = \mathbf{F}'_{Rx} + \mathbf{F}'_{Ry} = \sum F_x \mathbf{i} + \sum F_y \mathbf{j}$$

$$\text{主矩: } M_O = \sum_{i=1}^n M_O(\mathbf{F}_i)$$

(3) 简化结果分析。

① $\mathbf{F}'_R = 0, M_O \neq 0$, 其简化结果为一个合力偶。此时, 主矩 M_O 与简化位置无关, 主矩 M_O 为原来力系的合力偶矩。

② $\mathbf{F}'_R \neq 0, M_O = 0$, 简化为一个合力。此时, 主矢为原来力系的合力, 合力作用线通过简

化中心;当 $\mathbf{F}'_R \neq 0, M_O \neq 0$ 时,最终简化为一个合力,此时,主矢为原来力系的合力,合力作用线 O 点距离为

$$d = \left| \frac{M_O}{F'_R} \right|$$

③ $\mathbf{F}'_R = 0, M_O = 0$, 平面任意力系为平衡力系。

(4) 平面任意力系的平衡条件和平衡方程。

平面任意力系平衡的必要与充分条件为

$$\mathbf{F}'_R = 0, \quad M_O = 0$$

平衡方程的三种形式为

$$\text{一矩式: } \sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M_O(\mathbf{F}) = 0$$

$$\text{二矩式: } \sum F_x = 0, \quad M_A(\mathbf{F}) = 0, \quad M_B(\mathbf{F}) = 0$$

二矩式的适用条件: x 轴不能与 A 、 B 两点连线垂直。

$$\text{三矩式: } \sum M_A(\mathbf{F}) = 0, \quad \sum M_B(\mathbf{F}) = 0, \quad \sum M_C(\mathbf{F}) = 0$$

三矩式的适用条件: A 、 B 、 C 三点不能共线。

(5) 平面平行力系的平衡方程为

$$\sum F_y = 0, \quad \sum M_O(\mathbf{F}) = 0$$

$$\text{或 } \sum M_A(\mathbf{F}) = 0, \quad \sum M_B(\mathbf{F}) = 0$$

适用条件: A 、 B 两点的连线不能与力的作用线平行。

(6) 物体系统的平衡。求解物体系统平衡问题的关键是合理选取研究的对象。通常要对具体问题的已知量和待求量进行综合分析,先求解部分未知量或中间未知量,然后逐步求解全部所需未知量。

科学家简介

张 维



张维(1913—2001),北京市人,著名力学家、教育家,中国科学院和中国工程院两院院士,瑞典皇家工程科学院外籍院士。张维在唐山交通大学(今西南交通大学)土木系获工学学士学位,在伦敦帝国理工学院获工学硕士学位,在德国柏林高工(柏林工业大学)获工学博士学位。曾任清华大学教务长、副校长、深圳大学首任校长。他在弹塑性力学、板壳理论及结构工程,特别是圆环壳、弯管的强度、屈曲、振动及其工程应用、核电站管道系统、快中子增殖堆主钠池的结构完整性与安全评价等方面造诣极深。他创造性地运用解析法、半解析数值法、数值计算、力学试验等方法对具有较强工程背景的结构进行强度、稳定性分析。在教育思想方面,强调力学来自工程,为工程服务,提倡发挥学生的主动性。在力学与工程师教育、组织制订力学发展规划、推动国际科技文化交流方面均做出了重要贡献。

习题(一)

一、填空题

1. 平面任意力系的主矢 F'_R 与简化中心的位置_____关, 主矩 M_O 一般与简化中心的位置_____关, 而在_____的特殊情况下, 主矩与简化中心的位置_____关。

2. 如图 3-15 所示平面任意力系中, $F_1 = F_2 = F_3 = F_4$, 此力系向 A 点简化的结果是_____, 此力系向 B 点简化的结果是_____。

3. 如图 3-16 所示, x 轴与 y 轴夹角为 α , 设一力系在 Oxy 平面内对 y 轴和 x 轴上的 A、B 点有 $\sum M_A(F) = 0$, $\sum M_B(F) = 0$, 且 $\sum F_y = 0$, 但 $\sum F_x \neq 0$, $OA = l$, 则 B 点在 x 轴上的位置 $OB =$ _____。

4. 如图 3-17 所示, 折杆 ABC 与 CD 直杆在 C 处铰接, CD 杆上受一力偶 $M = \sqrt{2} \text{ N} \cdot \text{m}$ 作用, $l = 1 \text{ m}$, 不计各杆自重, 则 A 处的约束力为_____。

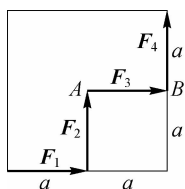


图 3-15

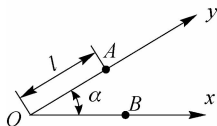


图 3-16

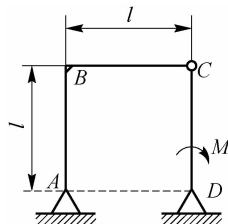


图 3-17

5. 同一圆盘上三种受力情况如图 3-18 所示, 则图_____与图_____是等效力系。

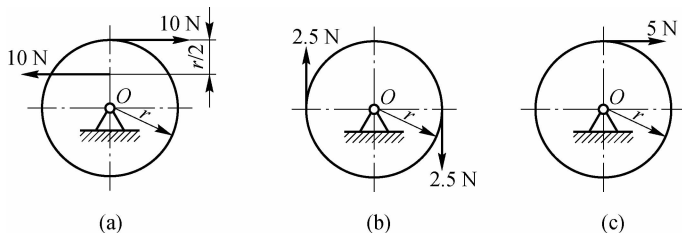


图 3-18

6. 有四个平面任意力系, 分别作用在四个刚体上, 各力的大小均相等, 方向分别如图 3-19 所示, 则各力系合成的最终结果为: (a) _____; (b) _____; (c) _____; (d) _____。

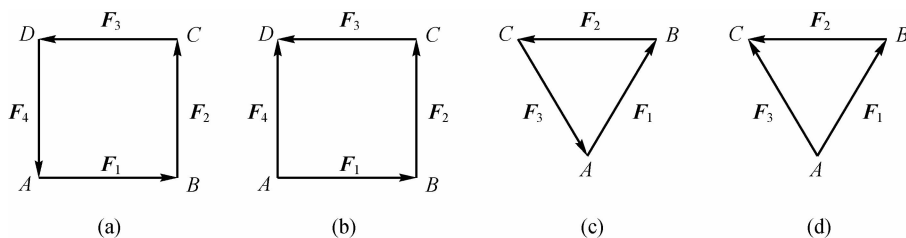


图 3-19

7. 若一构架由四个构件组成,每个构件均在平面任意力系作用下处于平衡状态,则整个系统最多可列_____个独立的平衡方程。当未知量多于独立平衡方程数时,则属于_____问题。

8. 判断图 3-20 所示各平衡物体是静定还是超静定问题,若是超静定问题,请确定超静定次数。

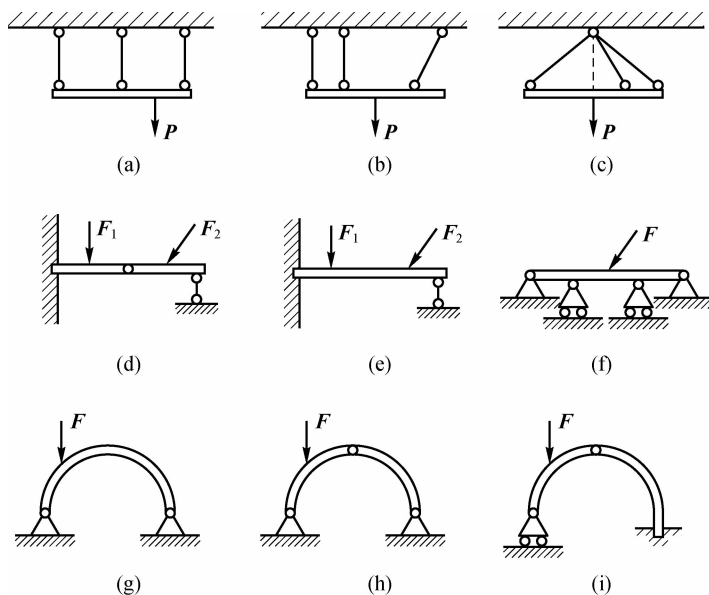


图 3-20

二、判断题

- () 1. 当平面任意力系向某点简化结果为力偶时,如果再向另一点简化,则其结果是一样的。
- () 2. 平面任意力系的平衡方程形式,除一矩式、二矩式、三矩式外,还可用三个投影式表示。
- () 3. 平面任意力系平衡的充要条件为力系的合力等于零。
- () 4. 设一平面任意力系向某一点简化得一合力,如另选适当的点为简化中心,则力系可简化为一力偶。
- () 5. 作用于刚体的平面任意力系主矢是个自由矢量,而该力系的合力(若有合力)是滑动矢量,但这两个矢量等值、同向。
- () 6. 作用于刚体上的平面任意力系,若其力多边形自行封闭,则此刚体平衡。
- () 7. 若平面任意力系向 O 点简化的主矢、主矩都不等于零,则可通过简化中心的恰当选择,使力系的主矢不为零,主矩等于零。
- () 8. 平面任意力系向其平面内任意点简化,如主矩恒等于零,则该力系一定平衡。
- () 9. 如图 3-21 所示,两结构受力等效。
- () 10. 如图 3-22 所示,平面连杆机构中的 AB 、 CD 杆上作用等值、反向力偶 M_1 、 M_2 ,此时 BC 不平行于 AD ,如不计杆重,则该机构处于平衡。

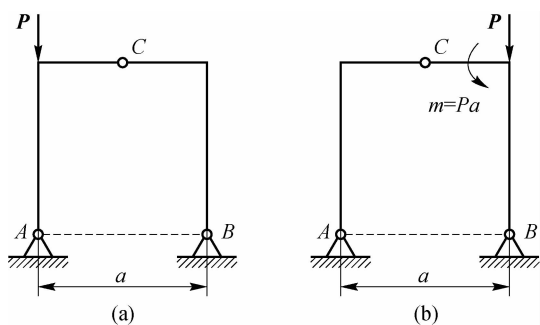


图 3-21

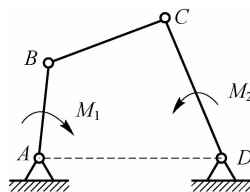


图 3-22

习题(二)

1. 平面任意力系中 $F_1 = 60\sqrt{2}$ kN, $F_2 = F_3 = 60$ kN, $M = 120$ kN·m, 作用线位置如图 3-23 所示, 图中尺寸单位为 m, 试求此力系向 O 点及 O_1 简化的结果。

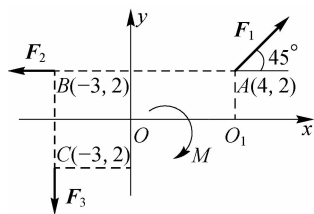


图 3-23

2. 在图 3-24 所示刚架中, 已知 $q = 3$ kN/m, $F = 6$ kN, $M = 10$ kN·m, 不计刚架自重。求固定端 A 处的约束力。

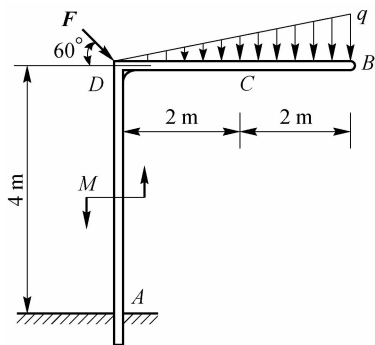


图 3-24

3. 构架由滑轮 D 、杆 AB 和 CBD 构成, 尺寸如图 3-25 所示, 不计各杆及滑轮的重力, 试求 A 、 C 处的约束力。

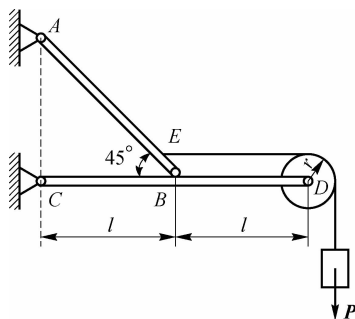


图 3-25

4. 连续梁的支座, 其载荷及尺寸如图 3-26 所示, 求各支座的约束力。

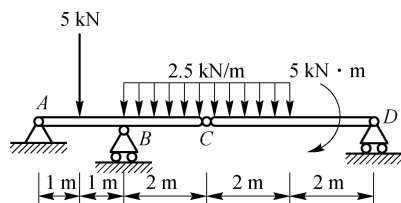


图 3-26

5. 三铰拱结构的载荷及尺寸如图 3-27 所示, 求支座 A、B 处的约束力。

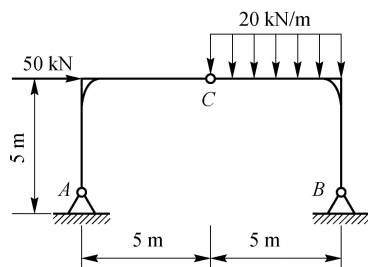


图 3-27

习题(三)

1. 构架由杆 AB、AC 和 DF 组成, 如图 3-28 所示。杆 DF 上的销子 E 可在杆 AC 的光滑槽内滑动, 不计各杆的重量。在水平杆 DF 的一端作用铅垂力 F , 求铅直杆 AB 上铰链 A、D 和 B 处所受的约束力。

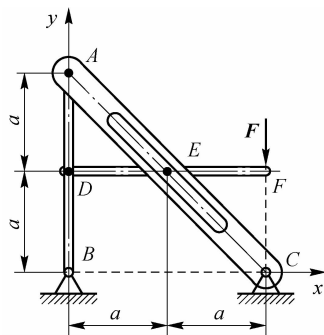


图 3-28

第一篇 静力学

2. 构件结构如图 3-29 所示, 各杆件自重不计, 已知 $P=qa$, $M=2qa^2$, 求 A、B 处的约束力。

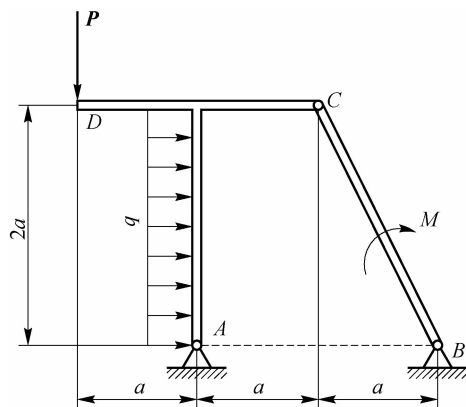


图 3-29

3. 图 3-30 所示平面构架中, A 处为固定端, E 处为固定铰支座, 杆 AB、杆 DE 与直角折杆 BCD 铰接。已知载荷 q 、 M , 不计各杆自重, 求 A、E 处的约束力。

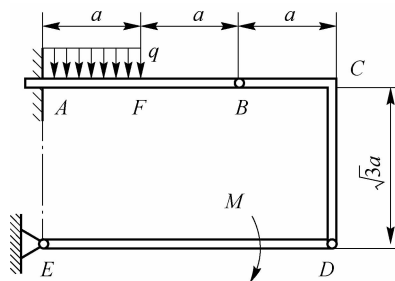


图 3-30

4. 直角曲杆 ABC、DE, 直杆 CD 及滑轮组成的结构如图 3-31 所示, AB 杆上作用有水平平均布载荷 q 。不计各构件的重量, 在 D 处作用一铅垂力 F , 在滑轮上悬挂一重为 P 的重物, 滑轮的半径 $r=a$, 且 $P=2F$, $CO=OD$ 。求支座 E 及固定端 A 处的约束力。

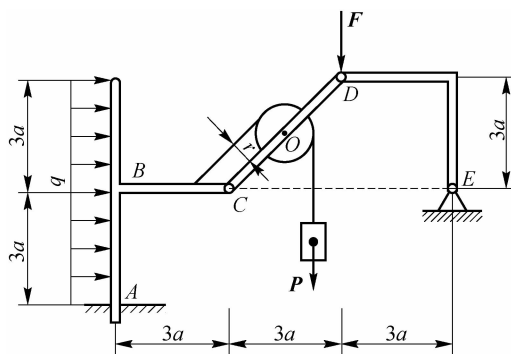


图 3-31