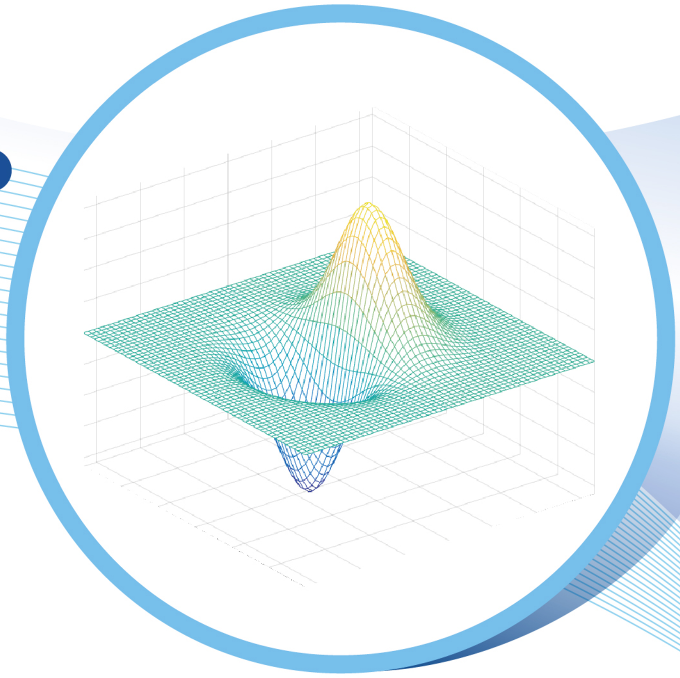
巍巍交大　百年书香
www.jiaodapress.com.cn
bookinfo@sjtu.edu.cn

策划编辑　金颖杰
责任编辑　胡思佳
封面设计　刘文东

高等数学

GAODENG SHUXUE



ISBN 978-7-313-30393-6
定价：45.00元

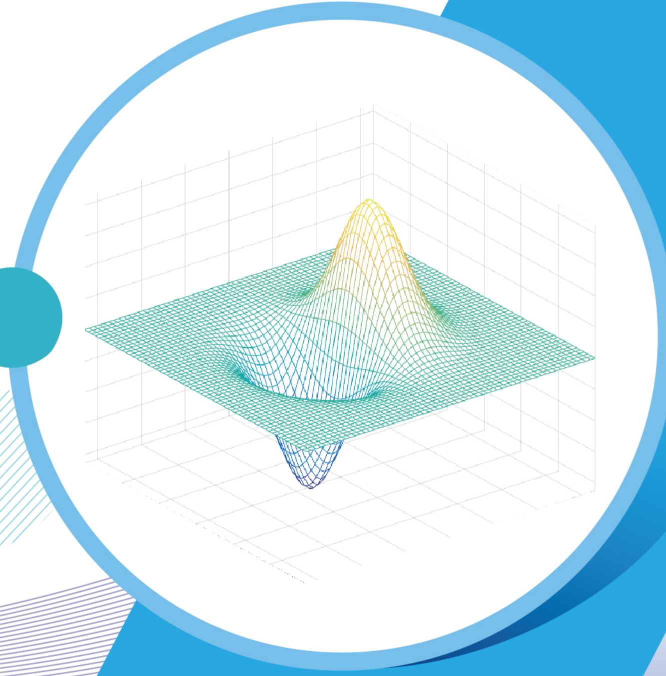
贵州省『十四五』职业教育规划教材
高等数学
主编　宋凌云
上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

贵州省“十四五”职业教育规划教材

高等数学

（职业本科版）

主编　宋凌云



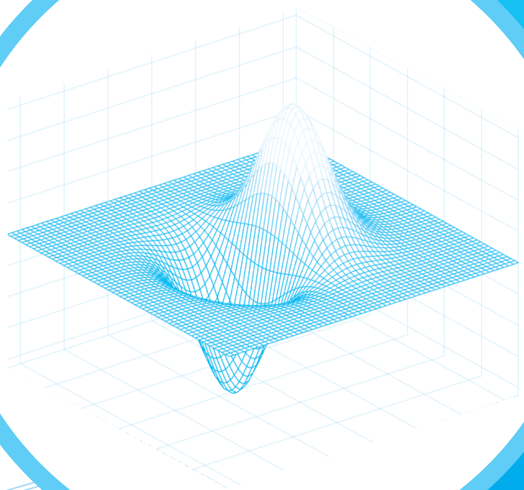
上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

贵州省“十四五”职业教育规划教材

高等数学

（职业本科版）

主　编　宋凌云
副主编　胡支军　李俊扬



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书共分为7章,内容包括函数、极限、连续,导数与微分,微分中值定理与导数的应用,不定积分,定积分,微分方程,多元函数微分法.附录中包含初等数学常用公式、积分表和MATLAB软件应用.本书的编写不刻意强调内容的专业性,尽量避免枯燥或繁杂的数学推导,充分展示与生活和专业密切相关的案例,使学生能够厚积数学文化,提升数学素养.

本书既可作为高等职业教育本科高等数学课程的教材,也可作为相关人士的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 / 宋凌云主编. -- 上海 : 上海交通大学出版社, 2024.7

ISBN 978-7-313-30393-6

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①宋… Ⅲ. ①高等数学-高等职业教育-教材 Ⅳ. ①O13

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2024)第 050927 号

高等数学
GAODENG SHUXUE

主　　编:宋凌云
出版发行:上海交通大学出版社　　地　　址:上海市番禺路951号
邮政编码:200030　　电　　话:021-64071208
印　　制:三河市骏杰印刷有限公司　　经　　销:全国新华书店
开　　本:850 mm×1 168 mm　1/16　　印　　张:14.5
字　　数:266千字
版　　次:2024年7月第1版　　印　　次:2024年7月第1次印刷
书　　号:ISBN 978-7-313-30393-6　　电子书号:ISBN 978-7-89424-722-3
定　　价:45.00元

前言

PREFACE

党的二十大报告指出:“加强基础学科、新兴学科、交叉学科建设,加快建设中国特色、世界一流的大学和优势学科.”数学是加快建设制造强国、质量强国、航天强国、交通强国、网络强国、数字中国的坚实基础,高等数学是高等职业教育本科各专业的基础课程,可以为学生学习专业知识、掌握职业技能奠定基础.

本书为适应职业本科教育发展的需要,满足职业本科高层次技术技能人才的要求,落实《“十四五”职业教育规划教材建设实施方案》《国家职业教育改革实施方案》《关于深化现代职业教育体系建设改革的意见》等文件精神,针对职业本科学生的学习特点,结合编者多年的教学经验编写而成.本书共分为 7 章,内容包括函数、极限、连续,导数与微分,微分中值定理与导数的应用,不定积分,定积分,微分方程,多元函数微分法.附录中包含初等数学常用公式、积分表和 MATLAB 软件应用.本书的编写不刻意强调内容的专业性,尽量避免枯燥或繁杂的数学推导,充分展示与生活和专业密切相关的案例,使学生能够厚积数学文化,提升数学素养.

本书具有以下特色.

(1)落实立德树人根本任务,融入育人元素.本书设置了“育德明理”栏目,介绍了我国数学家的伟大贡献等内容,可以帮助学生增强民族自豪感,丰富学识,增长见识,也充分体现了教材铸魂育人的功能.

(2)采用问题驱动引入知识点,将数学知识与实际应用有机地融合在一起,可以强化学生学以致用的能力.

(3)在附录中加入了初等数学常用公式,体现了职业本科高等数学的层次性,以利于实现辅助教学以及与初等数学衔接、贯通的目的;加入 MATLAB 软件应用部分的内容,可以培养学生采用现代信息化手段解决数学问题的能力.

(4)加大数字技术赋能,配有课件、微课、习题答案等多种教学资源,高效、直观、生动地呈现教学内容.

本书由贵阳康养职业大学宋凌云任主编,贵州大学胡支军、贵州师范大学李俊扬任副主编,贵阳康养职业大学陈昭剑、李晓涵参与了编写.本书在编写过程中参考了一些教材及资料,在此向相关作者表示诚挚的感谢!

由于编者水平有限,书中难免存在疏漏和不足之处,敬请广大读者批评指正.

编　者

目录

CONTENTS

第一章　函数、极限、连续

- 函数、极限、连续
  - 函数
    - 函数的概念
    - 函数的性质
    - 反函数与初等函数
  - 极限
    - 数列的极限
    - 函数的极限
  - 无穷小与无穷大
    - 无穷小的定义
    - 无穷小的运算性质
    - 无穷大的定义
    - 无穷小阶的定义
    - 等价无穷小
  - 极限运算法则与两个重要极限
    - 极限的四则运算
    - 两个重要极限
  - 函数的连续与间断
    - 函数的连续性概念
    - 函数的间断点
  - 连续函数的运算与性质
    - 连续函数的四则运算
    - 反函数与复合函数的连续性
    - 初等函数的连续性
    - 闭区间上连续函数的性质

微课：数-uomv5a

情境引入

一位护士值夜班，去药架上拿病人急用的药，药架上有 2 种药分别为 2 瓶，都一样大小，这时突然灯坏了，护士摸黑随手拿起 2 瓶，那么恰好拿到的 2 瓶是同一种药的概率是多大？

分析：很多人凭直觉判断概率是$\frac{1}{2}$，但实际结果并不是这样. 假设药架上的 2 种药分别都有 n 瓶，同样是在抹黑的情况下，护士随手拿起一瓶后，同种药还有 $n-1$ 瓶，药架上药瓶的总数为 $2n-1$ 瓶，那么护士拿到的药恰好是同一种的概率为$\frac{n-1}{2n-1}$，因此，按照问题中所给的条件，$n=2$，概率为$\frac{1}{3}$，并不是$\frac{1}{2}$.

假如药架上的 2 种药分别有无限多瓶，护士随手拿起 2 瓶的情况又如何呢？这就和我们接下来要学习的极限知识有关. 运用极限知识我们发现护士拿到同种药的概率会随着药瓶数量的增多而增大，药瓶数量 n 趋于无穷时的极限为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n-1}=\frac{1}{2}.$$

因此，药架上药瓶的数量越多，护士拿到同种药的概率就越接近于$\frac{1}{2}$.

极限是高等数学中非常重要的概念，极限的思想贯穿于高等数学的始终. 让我们从函数开始，逐步了解和掌握极限吧.

微课：函数-njlrwl

第一节　函　　数

一、函数的概念

在某些自然现象或社会现象中存在多个不断变化的量，即变量. 这些变量并不是孤立变化的，而是相互联系并遵循一定规律的，函数即用来描述这种联系. 下面先讨论两个变量的情形.

例如，在自由落体运动中，设物体下落的时间为 t，下落的距离为 s，假定开始下落的时刻 $t=0$，则变量 s 与 t 之间的相依关系可由数学模型

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

给定，其中 g 是重力加速度.

定义 1　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的非空数集. 若对于每个 $x\in D$，按照一定法则 f，总有确定的数值 y 与它对应，则称 y 是 x 的**函数**，记为

$$y=f(x),x\in D,$$

其中，x 称为**自变量**；y 称为**因变量**；数集 D 称为这个函数的**定义域**，也记为 D_f，即 $D_f=D$.

对每个 $x\in D$，按照对应法则 f，总有确定的值 y 与之对应，这个值称为函数在

点 x 处的**函数值**,记为 $f(x)$. 因变量与自变量之间的这种相依关系通常称为**函数关系**.

当自变量 x 取遍 D 中所有的数值时,对应的函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 $y=f(x)$ 的**值域**,记为 R_f 或 $f(D)$,即

$$R_f=f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}.$$

由函数的定义可以看出,函数的定义域与对应法则是确定函数的两个必不可少的要素,也就是说,如果两个函数的对应法则和定义域都相同,那么这两个函数就是相同的函数.

例 1 下列各组函数是不是相同的函数?为什么?

(1) $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$;

(2) $y=1$ 与 $y=\sin^2x+\cos^2x$;

(3) $y=x+1$ 与 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$;

(4) $y=\cos x$ 与 $y=\sqrt{1-\sin^2x}$.

解 因为(1)与(2)中两个函数的两个要素分别相同,所以它们是相同的函数;(3)中两个函数的定义域不同,所以它们是不同的函数;(4)中两个函数的对应法则不同,所以它们是不同的函数.

对于函数 $y=f(x)(x\in D)$,若取自变量 x 为横坐标,因变量 y 为纵坐标,则在平面直角坐标系 xOy 中就确定了一个点 (x,y). 当 x 取遍定义域 D 中的每一个数值时,平面上的点集

$$C=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的**图像**(见图 1-1).

微课:函数的图像-1k2ofy

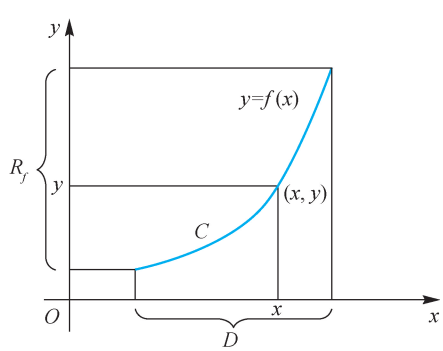


图 1-1

若自变量在定义域内任取一个数值,对应的函数值总是唯一的,则这种函数称为**单值函数**,否则称为**多值函数**.

例如,方程 $x^2+y^2=a^2$ 在闭区间 $[-a,a]$ 上确定了一个以 x 为自变量、y 为因变量的函数,对每一个 $x\in(-a,a)$,都有两个 y 值 $(\pm\sqrt{a^2-x^2})$ 与之对应,因而 y 是多值函数.

注意 若无特别声明,本书中的函数均指单值函数.

常用的函数表示方法有以下三种.

(1) **表格法**:将自变量的值与对应的函数值列成表格的方法.

(2) **图像法**:在坐标系中用图像来表示函数关系的方法.

(3) **公式法(解析式法)**:将自变量和因变量之间的关系用数学表达式(又称为解析表达式)来表示的方法.

绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0, \end{cases}$ 其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=[0,+\infty)$,它的图像如图 1-2 所示.

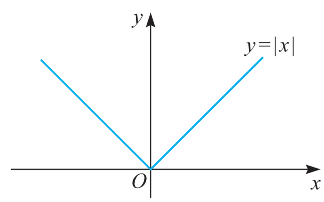


图 1-2

微课:求函数定义域的例题-ihsxis

有些函数,对应自变量的不同取值范围,有不同的对应法则,这种函数称为**分段函数**. 前文中的绝对值函数就属于分段函数.

二、函数的性质

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,数集 $X\subset D$. 若存在一个正数 M,使得对任一 $x\in X$,恒有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**,或称 $f(x)$ 是 X 上的**有界函数**. 每一个满足上述不等式的正数 M 都是该函数的界.

若不存在这样的正数 M,则称 $f(x)$ 在 X 上**无界**,或称 $f(x)$ 是 X 上的**无界函数**.

例如,函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界,因为对任意实数 x,恒有 $|\sin x|\leqslant 1$. 又如,函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内无界,在区间 $[1,+\infty)$ 内有界.

2. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 若对任一 $x\in D$,恒有

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**偶函数**;若对任一 $x\in D$,恒有

$$f(-x)=-f(x),$$

微课:函数的定义域-r2ob01

则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

偶函数的图像关于 y 轴对称,奇函数的图像关于原点对称.

例如,$f(x)=x^2$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 内的偶函数,因为 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$;$f(x)=x^3$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 内的奇函数,因为 $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$.

3. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I\subset D$. 若对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2,当

$x_1 < x_2$ 时，恒有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加函数**；当 $x_1 < x_2$ 时，恒有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少函数**.

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在常数 $T > 0$，使得对任一 $x \in D$，有 $(x \pm T) \in D$，且

$$f(x \pm T) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**，称 T 为 $f(x)$ 的**周期**. 通常所说的周期函数的周期是指它的最小正周期.

例如，$y = \sin x$，$y = \cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；$y = \tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

周期函数的图像特点是：若把一个周期为 T 的周期函数在一个周期内的图像向左或向右平移周期的正整数倍距离，则它将与周期函数的其他部分图像重合（见图 1-3）.

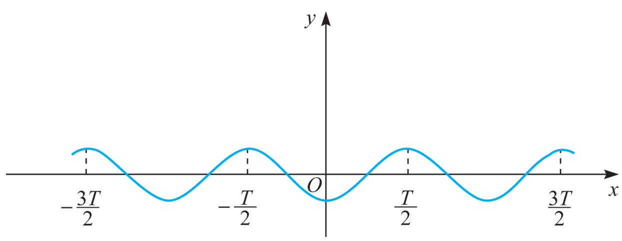


图 1-3

三、反函数与初等函数

1. 反函数

微课：函数图像看性质 1-x4txed

函数关系的实质就是从定量分析的角度来描述运动过程中变量之间的相互依赖关系. 但在研究过程中，哪个量作为自变量，哪个量作为因变量（函数）是由具体问题决定的.

定义 2　设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D，值域为 R_f. 若对于值域 R_f 中的任一数值 y，都有唯一确定的 $x \in D$ 与之对应，且满足关系式

$$f(x) = y,$$

则确定了一个以 y 为自变量、x 为因变量的函数，称为函数 $y = f(x)$ 的**反函数**，记为 $x = f^{-1}(y)$. 反函数的定义域为 R_f，值域为 D. 相对于反函数，函数 $y = f(x)$ 称为**直接函数**.

微课：函数图像看性质 2-eniktl

由于习惯上用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，因此将反函数中的 x 与 y 互换位置，即记为 $y = f^{-1}(x)$，$x \in R_f$.

在同一直角坐标系中，函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称.

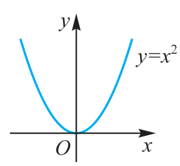
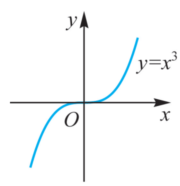
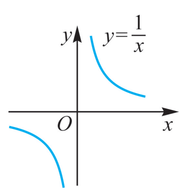
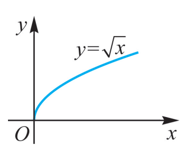
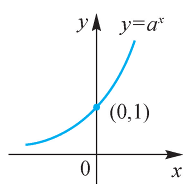
定理 设函数 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上单调增加(或减少),则函数 $y=f(x)$ 存在反函数,其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在对应区间 $I_y=\{y \mid y=f(x), x\in I_x\}$ 上也单调增加(或减少).

微课:基本初等函数-woz4mc

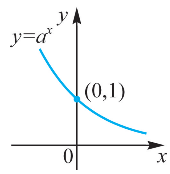
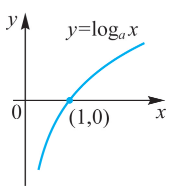
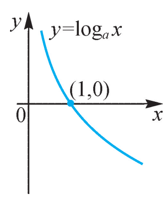
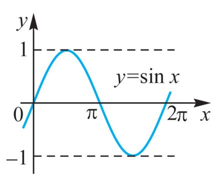
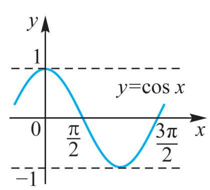
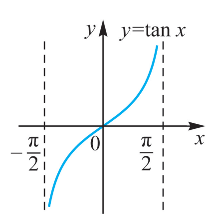
2. 初等函数

(1) 基本初等函数. 幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数是五类基本初等函数,它们的图像、定义域与值域及特性如表 1-1 所示.

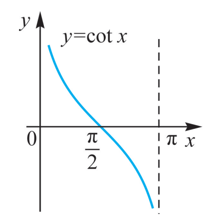
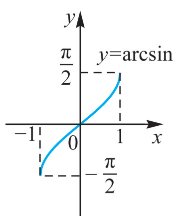
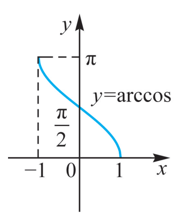
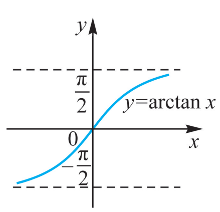
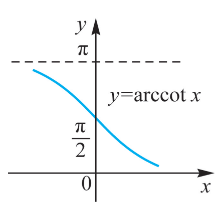
表 1-1

函数		图像	定义域与值域	特性
幂函数	$y=x^2$		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$	偶函数,在 $(-\infty,0)$ 内单调减少,在 $(0,+\infty)$ 内单调增加
	$y=x^3$		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$	奇函数,在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加
	$y=x^{-1}=\dfrac{1}{x}$		$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$	奇函数,在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 内单调减少
	$y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$		$x\in[0,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$	在 $[0,+\infty)$ 上单调增加
指数函数	$y=a^x$ $(a>1)$		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$	在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加

（续表）

函 数		图 像	定义域与值域	特 性
指数函数	$y=a^x$ $(0<a<1)$		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$	在$(-\infty,+\infty)$内单调减少
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>1)$		$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$	在$(0,+\infty)$内单调增加
	$y=\log_a x$ $(0<a<1)$		$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$	在$(0,+\infty)$内单调减少
三角函数	$y=\sin x$		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$	奇函数，周期为 2π，有界，在$\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$上单调增加，在$\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$上单调减少$(k\in\mathbf{Z})$
	$y=\cos x$		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$	偶函数，周期为 2π，有界，在$[2k\pi,2k\pi+\pi]$上单调减少，在$[2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi]$上单调增加$(k\in\mathbf{Z})$
	$y=\tan x$		$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$	奇函数，周期为 π，在$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$内单调增加$(k\in\mathbf{Z})$

（续表）

函数		图像	定义域与值域	特性
三角函数	$y=\cot x$		$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$	奇函数，周期为 π，在 $(k\pi,k\pi+\pi)$ 内单调减少 $(k\in\mathbf{Z})$
反三角函数	$y=\arcsin x$		$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	奇函数，在 $[-1,1]$ 上单调增加，有界
	$y=\arccos x$		$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$	在 $[-1,1]$ 上单调减少，有界
	$y=\arctan x$		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	奇函数，在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加，有界
	$y=\operatorname{arccot} x$		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$	在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调减少，有界

微课：复合函数-3de4lj

（2）复合函数的概念.

定义 3 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，而函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 R_φ，若 $D_f\cap R_\varphi\neq\varnothing$，则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为 x 的**复合函数**. 其中，x 称为自变量；y 称为因变量；u 称为**中间变量**.

例 2　指出下列复合函数的复合过程.

①$y=(3x+5)^{10}$；　②$y=\sin^2 x$；　③$y=\sqrt{\cos\sqrt{x}}$.

解　①$y=(3x+5)^{10}$ 可以看作由 $y=u^{10}, u=3x+5$ 复合而成.

②$y=\sin^2 x$ 可以看作由 $y=u^2, u=\sin x$ 复合而成.

③$y=\sqrt{\cos\sqrt{x}}$ 可以看作由 $y=\sqrt{u}, u=\cos v, v=\sqrt{x}$ 复合而成.

(3) 初等函数的概念.

由基本初等函数经过有限次四则运算或经过有限次函数的复合步骤得到的可用一个式子表示的函数叫作**初等函数**.

注意

(1) 复合函数的定义可以推广到多个中间变量的情形.

(2) 将一个比较复杂的函数分解为若干个简单函数时,一定要分清层次,由外到内,逐层分解.

(3) 并不是任意两个函数都能构成复合函数.

习　题　一

1. 求下列函数的定义域.

(1)$y=\sqrt{x^2-1}$；　(2)$y=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$；

(3)$y=\ln(x+1)$；　(4)$y=\tan(x+1)$；

(5)$y=\arcsin\dfrac{x-3}{2}$；　(6)$y=\arcsin(\ln x)$.

2. 求下列函数的值.

(1) 已知 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0, \\ 1, & x=0, \\ x^2-1, & x>0, \end{cases}$ 求 $f(-1), f(0), f(2)$；

(2) 已知 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=4x-\sqrt{1+x^2}$，求 $f(1)$.

3. 设 $f(x)$ 为定义在区间 $(-l,l)$ 内的奇函数，若 $f(x)$ 在区间 $(0,l)$ 内单调增加，证明 $f(x)$ 在区间 $(-l,0)$ 内也单调增加.

4. 判断下列函数的奇偶性.

(1)$f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$；

(2)$f(x)=x(x-1)(x+1)$；

(3)$f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}(a>0$ 且 $a\neq 1)$.

5. 求下列周期函数的周期.

(1)$f(x)=\sin^2 x$；　(2)$f(x)=\sin 4x$.

6. 求下列函数的反函数.

(1)$y=\dfrac{1-x}{1+x}$；　(2)$y=1+\ln(x+2)$.

7. 指出下列复合函数的复合过程.

(1)$y=\sin x^2$；　(2)$y=\sqrt{1-\sin x}$；

(3)$y=(1+\lg x)^3$；　(4)$y=e^{\cos^2 x}$.

微课：初等函数 - cdroew

第二节　极　　限

一、数列的极限

定义 1　对于数列$\{y_n\}$，如果当自变量n无限增大时，y_n趋于某个确定的常数A，那么A叫作数列$\{y_n\}$的**极限**，记作

$$\lim_{n\to\infty} y_n = A \quad 或 \quad y_n \to A(n\to\infty),$$

此时，也称数列$\{y_n\}$收敛于A. 如果数列$\{y_n\}$的极限不存在，那么数列$\{y_n\}$是发散的.

微课：函数的极限 1-pwoq4g

由定义 1 可知，数列$\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$的极限为 0，即$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$；数列$\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$的极限为 1，即$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$；数列$\left\{\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}\right\}$的极限为 1，即$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1$. 因为数列$\{2^n\}$和$\left\{\dfrac{n}{8}\right\}$当自变量$n$无限增大时，$2^n$和$\dfrac{n}{8}$都趋于正无穷大；数列$\{(-1)^n\}$当自变量$n$无限增大时，$(-1)^n$振荡且不趋于任何确定的数值，所以数列$\{2^n\}$，$\left\{\dfrac{n}{8}\right\}$，$\{(-1)^n\}$的极限都不存在. 但数列$\{2^n\}$和$\left\{\dfrac{n}{8}\right\}$的极限不存在的原因是：当自变量$n$无限增大时，$\{2^n\}$和$\left\{\dfrac{n}{8}\right\}$都趋于正无穷大，为了表示其性态，可以记它们的极限为正无穷大，即$\lim\limits_{n\to\infty}2^n=+\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{8}=+\infty$.

例 1　观察并求出下列数列的极限.

(1)$y_n=1+\dfrac{1}{n}$；　(2)$y_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$；　(3)$y_n=3$.

解　(1) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=1$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=0$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}3=3$.

一般地，任何一个常数数列（即数列的每一项都是由同一个常数构成的）的极限就是这个常数本身，即$\lim\limits_{n\to\infty}C=C$（$C$为常数）.

微课：函数极限的定义 -b4izyt

二、函数的极限

把数列极限定义中的函数为$f(n)$而自变量的变化过程为$n\to\infty$等特殊性撇开，可以引入函数极限的概念. 在自变量的某个变化过程中，如果对应的函数值无限接近于某个确定的数值，那么这个确定的数值就叫作在这一变化过程中**函数的**

极限. 由于自变量的变化不同，函数的极限表现为不同的形式.

1. $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

现在考虑自变量 x 无限接近于有限值 x_0 或者说趋于有限值 x_0 时，对应的函数值 $f(x)$ 的变化情形.

小提示

设 a 和 δ 是两个实数，且 $\delta > 0$，则称数集

$$\{x \mid |x-a| < \delta\} \text{ 或 } \{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}$$

为点 a 的邻域，记作 $U(a,\delta)$，并称点 a 为该邻域的中心，δ 为该邻域的半径. $\{x \mid a < x < a+\delta\}$ 为点 a 的右邻域，记作 $U_{+}(a,\delta)$；$\{x \mid a-\delta < x < a\}$ 为点 a 的左邻域，记作 $U_{-}(a,\delta)$.

因为 $|x-a|$ 表示点 x 与点 a 之间的距离，所以 $U(a,\delta)$ 表示与点 a 的距离小于 δ 的一切点 x 的全体，即邻域表示以点 a 为中心的任何开区间. 点 a 的 δ 邻域去掉中心点 a 后的集合称为点 a 的去心邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$$

例如，点 0 的 3 邻域为 $\{x \mid |x| < 3\}$，点 1 的 $\frac{1}{2}$ 去心邻域为 $\left\{x \mid 0 < |x-1| < \frac{1}{2}\right\}$.

定义 2　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义，如果在 $x \to x_0$ 的过程中，对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于确定的数值 A，那么称 A 是**函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限**，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A(x \to x_0).$$

从定义 2 中可以看出，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处是否存在极限与 $f(x)$ 在点 x_0 处是否有定义无关.

例如，$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$，如图 1-4 所示. 这里函数 $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ 在点 $x=1$ 处没有定义，但是它的极限却存在且为 2.

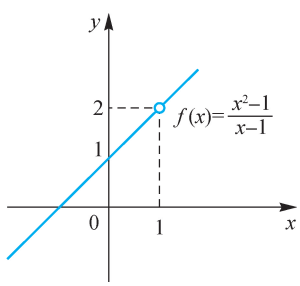


图 1-4

例 2　求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} C$（$C$ 为常数）；　(2) $\lim\limits_{x \to x_0} x$；　(3) $\lim\limits_{x \to 1}(x+2)$.

解　(1) 因为 C 为常数，当 x 无限接近于 x_0 时，C 不变，如图 1-5 所示，所以 $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$.

(2) 因为当 $x \to x_0$ 时，函数值 x 无限接近于 x_0，如图 1-6 所示，所以 $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

(3) 因为当 x 无限接近于 1 时，$x+2$ 无限接近于 3，如图 1-7 所示，所以 $\lim\limits_{x \to 1}(x+2) = 3$.

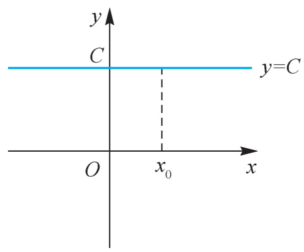


图 1-5

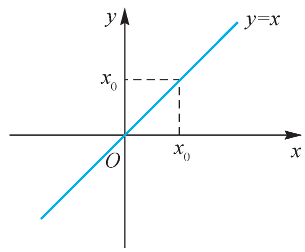


图 1-6

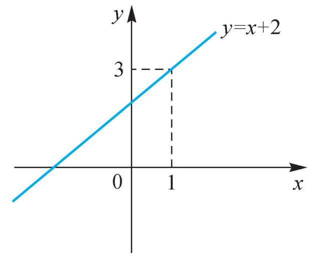


图 1-7

当考虑函数 $f(x)$ 的极限时，如果自变量 x 沿着小于(或大于) x_0 的方向趋于 x_0，那么称 x 从左(或右)侧趋于 x_0，记为 $x \to x_0^-$ (或 $x \to x_0^+$).

微课：函数的极限 2-aqkgrh

如果当 $x \to x_0^-$ (或 $x \to x_0^+$) 时，$f(x)$ 无限接近于确定的数值 A，那么称 A 是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左(或右)极限，记作

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \text{（或} \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A\text{）}.$$

左极限和右极限统称为单侧极限.

根据 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限定义，以及左、右极限的定义，容易得出结论：$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 成立的充要条件是 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$.

因为当 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 中至少有一个不存在，或者 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 都存在但不相等时，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 是不存在的，所以上述结论可以用来判断函数的极限是否存在.

例 3 求函数 $f(x) = \begin{cases} 3x-1, & x < 1, \\ x+1, & x > 1 \end{cases}$ 在点 $x=1$ 处的极限.

解

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-}(3x-1) = 2,$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+}(x+1) = 2,$$

因为

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = 2,$$

所以

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2.$$

2. $x \to \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

定义 3 设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义，如果在 $x \to \infty$ 的过程中，对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于确定的数值 A，那么称 A 是**函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限**，记作

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \to A (x \to \infty).$$

如果将 x 取正值且无限增大，称为 x 趋于正无穷大，记作 $x \to +\infty$，而将 x 取负值且 $|x|$ 无限增大，称为 x 趋于负无穷大，记作 $x \to -\infty$，那么，可将函数 $f(x)$ 在这两种极限过程中的极限分别记作 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$，$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

根据上述定义可知，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$. 因为当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 中至少有一个不存在，或者 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 都存在，但不相等时，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 是不存在的，所以上述结论也可以用来判断函数的极限是否存在.

例 4 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}(x\neq 0)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限.

解 由函数的图像(见图 1-8)容易看出，当 x 向左或向右无限增大时，$f(x)$ 都无限接近于 0，所以

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

例 5 判断极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 是否存在.

解 由函数的图像(见图 1-9)可以看出

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}.$$

因为

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x\neq\lim_{x\to-\infty}\arctan x,$$

所以极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

微课：函数的极限 3-yuacfo

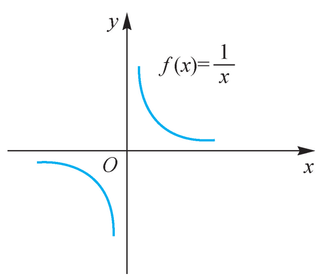


图 1-8

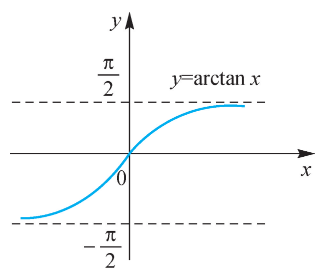


图 1-9

3. 函数极限的性质

性质 1（函数极限的唯一性） 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，那么它的极限是唯一的.

性质 2（局部有界性） 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，那么函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有界.

性质 3（局部保号性） 如果给定函数 $f(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 且 $A>0$(或 $A<0$)，那么在点 x_0 的某一去心邻域内，有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

性质 4（夹逼准则） 如果函数 $g(x)$，$f(x)$，$h(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内满足下列条件：

(1) $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$.

则函数 $f(x)$ 的极限存在，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

以上函数极限性质是以 $x\to x_0$ 为例展开叙述的，对其他极限过程同样适用，这里不再叙述.

习 题 二

1. 判定下列函数的极限在给定的自变量变化趋势下是否存在. 若存在，值为多少？

(1) $x\to+\infty, f(x)=\arctan x$；　　(2) $x\to 0^-, f(x)=x\sin\frac{1}{x}$；

(3) $x\to\frac{1}{2}, f(x)=x^2$；　　(4) $x\to 1, f(x)=\frac{x-1}{x^2-1}$.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x+1, & x>0,\end{cases}$ 讨论当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的极限是否存在.

第三节　无穷小与无穷大

一、无穷小的定义

定义 1　如果函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$ 时的极限为零，那么称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$ 时的**无穷小**.

特别地，以零为极限的数列 $\{x_n\}$ 称为当 $n\to\infty$ 时的无穷小.

例如，$\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$，函数 $y=\sin x$ 是当 $x\to 0$ 时的无穷小；$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$，函数 $y=\frac{1}{x}$ 是当 $x\to\infty$ 时的无穷小；$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$，数列 $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ 是当 $n\to\infty$ 时的无穷小.

小提示

(1) 根据无穷小的定义，无穷小本质上是这样一个变量(函数)：在某一过程(如 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$) 中，其绝对值小于任意给定的正数 ε. 不要将无穷小与很小的数(如千万分之一)混淆. 零是可以作为无穷小的唯一的常数.

(2) 无穷小是相对于 x 的某个变化过程而言的. 例如，当 $x\to\infty$ 时，$\frac{1}{x}$ 是无穷小；当 $x\to 2$ 时，$\frac{1}{x}$ 不是无穷小.

无穷小与函数极限有着密切的关系.

定理 1　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充要条件是

$$f(x)=A+\alpha,$$

其中 α 是当 $x \to x_0$ 时的无穷小.

定理 1 的结论在今后的学习中经常会用到，尤其是在进行理论推导或证明时，利用它可将函数的极限运算问题转化为常数与无穷小的代数运算问题.

二、无穷小的运算性质

定理 2　有限个无穷小的代数和仍是无穷小.

小提示

无穷多个无穷小的代数和未必是无穷小. 例如，当 $n \to \infty$ 时，数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 是无穷小，但

$$\lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{n个}\right)=1,$$

即当 $n \to \infty$ 时，数列 $\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right\}$ 不是无穷小.

定理 3　有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

例 1　证明 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$.

证明　因为 $\sin\frac{1}{x}$ 为有界函数，且当 $x\to 0$ 时，x 为无穷小，所以当 $x \to 0$ 时，$x\sin\frac{1}{x}$ 为无穷小. 故有

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0.$$

推论 1　常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论 2　有限个无穷小的乘积是无穷小.

三、无穷大的定义

定义 2　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义(或 $|x|$ 大于某一正数时有定义). 若对于任意给定的正数 M(不论它有多大)，总存在正数 δ(或正数 X)使得满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$(或 $|x|>X$) 的一切 x 所对应的函数值 $f(x)$ 满足不等式

$$|f(x)|>M,$$

则称函数 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$(或 $x\to\infty$) 时的**无穷大**，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty(或\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty).$$

若把无穷大定义中的 $|f(x)|>M$ 换为 $f(x)>M$(或 $f(x)<-M$)，则称函数 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$(或 $x\to\infty$) 时的**正无穷大**(或**负无穷大**)，记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=+\infty(或\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=-\infty).$$

注意

从通常意义上讲，当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$) 时为无穷大的函数 $f(x)$，其极限是不存在的. 但为了便于叙述函数的这一性态，也可说“函数的极限是无穷大”.

四、无穷小阶的定义

定义 3　设 α,β 是自变量在同一变化过程中的两个无穷小，且 $\alpha\neq 0$.

（1）若 $\lim \frac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 是比 α **高阶的无穷小**，记为 $\beta=o(\alpha)$.

注意

无穷大一定是无界变量，但无界变量不一定是无穷大.

（2）若 $\lim \frac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称 β 是比 α **低阶的无穷小**.

（3）若 $\lim \frac{\beta}{\alpha}=c(c\neq 0)$，则称 β 与 α 是**同阶无穷小**. 特别地，若 $\lim \frac{\beta}{\alpha}=1$，则称 β 与 α 是**等价无穷小**，记为 $\alpha\sim\beta$.

（4）若 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k}=c(c\neq 0,k>0)$，则称 β 是 α 的 **k 阶无穷小**.

例如，对三个无穷小 $x,x^2,\sin x(x\to 0)$ 而言，x^2 是比 x 高阶的无穷小，x 是比 x^2 低阶的无穷小，而 $\sin x$ 与 x 是等价无穷小.

五、等价无穷小

根据等价无穷小的定义，可以证明当 $x\to 0$ 时，常用的等价无穷小有如下关系.

$\sin x\sim x,\tan x\sim x,\arcsin x\sim x,\arctan x\sim x,1-\cos x\sim \frac{1}{2}x^2,\ln(1+x)\sim x,\mathrm{e}^x-1\sim x,a^x-1\sim x\ln a,\sqrt[n]{1+x}-1\sim \frac{1}{n}x$.

小提示

当 $x\to 0$ 时，x 为无穷小. 在常用的等价无穷小中，用任意一个无穷小 $f(x)$ 代替 x 后，上述等价关系依然成立. 例如，当 $x\to 0$ 时，有 $\sin x^3\sim x^3,\mathrm{e}^{-x^2}-1\sim -x^2,\ln(1+4x)\sim 4x$，等等.

定理 4 设 $\alpha,\alpha',\beta,\beta'$ 是自变量在同一变化过程中的无穷小，且 $\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$，$\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则

$$\lim \frac{\beta}{\alpha}=\lim \frac{\beta'}{\alpha'}.$$

定理 4 表明，在求两个无穷小之比的极限时，分子和分母都可以用等价无穷小来替换. 因此，若无穷小的替换运用得当，则可简化极限的计算.

微课：无穷小量与无穷大量-o4svdr

定理 5 α 与 β 是等价无穷小的充要条件是

$$\beta=\alpha+o(\alpha).$$

例如，当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x,1-\cos x\sim \frac{1}{2}x^2$ 可表述为

$$\sin x=x+o(x),\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o(x).$$

例 2 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x^3+3x}$.

解 当 $x\to 0$ 时，$\sin 2x\sim 2x,x^3+3x\sim 3x$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x^3+3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}.$$

例 3 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x}{\sin 3x}$.

解 当 $x\to 0$ 时，$\tan 5x\sim 5x$，$\sin 3x\sim 3x$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 5x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{3x}=\frac{5}{3}.$$

例 4 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}$.

当 $x\to 0$ 时，$\tan x\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\frac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

注意

在用定理 4 求极限的过程中，若分子或分母为和式，则不能将和式中的某一项或几项用与其等价的无穷小替换，而应将分子或分母整体加以替换；若其分子或分母为几个因子之积，则可将其中某一个或几个因子用与其等价的无穷小替换.

习 题 三

1. 函数 $y=x\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是否有界?这个函数是否为当 $x\to\infty$ 时的无穷大?为什么?

2. 利用等价无穷小替换求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\arctan x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin 2x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}$.

第四节 极限运算法则与两个重要极限

一、极限的四则运算

在下面的讨论中，没有表明自变量变化过程的记号“lim”是指对 $x\to x_0$ 和 $x\to\infty$ 均成立.

定理 1(极限的四则运算法则) 设 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$；

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$；

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$.

小提示

法则(1)和法则(2)均可被推广到有限个函数的情形. 若 $\lim f_1(x), \lim f_2(x), \cdots, \lim f_n(x)$ 都存在,则有

$$\lim[f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_n(x)] = \lim f_1(x) \pm \lim f_2(x) \pm \cdots \pm \lim f_n(x),$$

$$\lim[f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \cdots \cdot f_n(x)] = \lim f_1(x) \cdot \lim f_2(x) \cdot \cdots \cdot \lim f_n(x).$$

推论 1 若 $\lim f(x)$ 存在,且 C 为常数,则

$$\lim[Cf(x)] = C\lim f(x),$$

即常数因子可以移到极限符号外面.

推论 2 若 $\lim f(x)$ 存在,且 n 为正整数,则

$$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n.$$

注意

极限的四则运算法则要求参与运算的各个函数的极限均存在;法则(3)还必须满足分母的极限不为零,否则,不能直接使用该法则.

例 1 求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-1}{x^2-5x+3}$.

解 由于分母的极限不为零,所以

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x^2-5x+3} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-1)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-5x+3)} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}x^2-\lim\limits_{x\to 2}1}{\lim\limits_{x\to 2}x^2-5\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}3}$$

$$= \frac{\left(\lim\limits_{x\to 2}x\right)^2-1}{\left(\lim\limits_{x\to 2}x\right)^2-5\times 2+3} = \frac{2^2-1}{2^2-10+3} = -1.$$

例 2 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+5}{x^3-1}$.

解 由于分母的极限为零,所以不能直接使用法则(3). 但因

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x+5} = 0,$$

故

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+5}{x^3-1} = \infty.$$

例 3 求 $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3x-1)$.

解 $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3x-1) = \left(\lim\limits_{x\to 2}x\right)^2+3\lim\limits_{x\to 2}x-\lim\limits_{x\to 2}1 = 2^2+3\times 2-1 = 9.$

利用极限的四则运算法则,不难得出以下结论.

设多项式 $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$,则有

$$\lim_{x\to x_0}P(x) = a_nx_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \cdots + a_1x_0 + a_0 = P(x_0).$$

定理 2(复合函数的极限运算法则) 设函数 $y = f[g(x)]$ 是由函数 $y = f(u)$ 与函数 $u = g(x)$ 复合而成的,$f[g(x)]$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义,若

$$\lim_{x\to x_0}g(x) = u_0, \lim_{u\to u_0}f(u) = A,$$

且存在 $\delta_0 > 0$,当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_0)$ 时,有 $g(x) \neq u_0$,则

$$\lim_{x\to x_0}f[g(x)] = \lim_{u\to u_0}f(u) = A.$$

小提示

(1) 对于 u_0 或 x_0 为无穷大的情形，也可得到类似的定理.

(2) 定理 2 表明，若函数 $f(u)$ 和 $g(x)$ 满足该定理的条件，则作代换 $u=g(x)$，可把求 $\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)]$ 转化为求 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)$，其中 $u_0=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.

二、两个重要极限

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

证明　在如图 1-10 所示的单位圆中，设 $\angle AOB=x$，且 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$，点 A 处的切线与 OB 的延长线相交于 D 点，又因为 $BC\perp OA$，故

$$\sin x=CB,\ x=\overset{\frown}{AB},\ \tan x=AD.$$

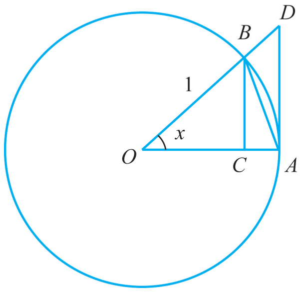


图 1-10

易见，$\triangle AOB$ 的面积 $<$ 扇形 AOB 的面积 $<\triangle AOD$ 的面积，所以

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x,$$

即

$$\sin x<x<\tan x.$$

不等式两边同时除以 $\sin x$，整理得

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

因为 $\cos x,\dfrac{\sin x}{x},1$ 都是偶函数，所以上面的不等式在 $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$ 时也成立. 再由 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$ 及定理 2，即得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

该极限的一般形式为

$$\lim_{\square\to 0}\frac{\sin\square}{\square}=1,$$

其中，$\square$ 代表自变量的某个函数.

小提示

该重要极限可以用来计算一些与三角函数有关的极限，其变形公式为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$.

例 4 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{3x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\sin 2x}{2x}\right)=\dfrac{2}{3}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}=\dfrac{2}{3}$.

例 5 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1$.

例 6 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}$.

微课：两个重要极限 1-vxbfyl

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

证明 先考虑x取正整数n而趋于$+\infty$的情形.

设$x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$，按牛顿二项式定理，有

$$\begin{aligned}x_n&=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\\&=1+\frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots+\\&\quad\frac{n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}\\&=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\\&\quad\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).\end{aligned}$$

同理可得，

$$\begin{aligned}x_{n+1}=&1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\cdots+\\&\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+\\&\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).\end{aligned}$$

比较x_n与x_{n+1}的展开式中的各项可知，除前两项相等外，从第三项起，x_{n+1}的

各项都大于 x_n 的对应项，而且 x_{n+1} 还多了最后一个正项，因而 $x_{n+1}>x_n$，即 $\{x_n\}$ 为单调增加数列. 又因为

$$x_n<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3,$$

故 $\{x_n\}$ 有上界. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，常用字母 e 表示该极限值，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}.$$

下面考虑 x 取任意正实数而趋于 $+\infty$ 的情形.

对于任意正实数 x，总可找到正整数 n，使得 $n\leqslant x<n+1$，当 $x\to+\infty$ 时，有 $n\to\infty$，因为

$$1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{x}\leqslant 1+\frac{1}{n},$$

所以

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}=\mathrm{e},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\mathrm{e},$$

由夹逼准则，得

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

对于 $x\to-\infty$ 的情形，令 $x=-(t+1)$，当 $x\to-\infty$ 时，$t\to+\infty$，则

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-t-1}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\cdot\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)=\mathrm{e}.$$

综上所述，可得第二个重要极限为

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

该极限的一般形式为

$$\lim_{\square\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}=\mathrm{e},$$

其中，$\square$ 代表自变量的某个函数.

小提示

利用复合函数的极限运算法则，若令 $y=\dfrac{1}{x}$，则第二个重要极限变为

$$\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=\mathrm{e},$$

其一般形式为

$$\lim_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=\mathrm{e},$$

其中，$\square$ 代表自变量的某个函数.

微课：两个重要极限 2-clfzqp

例 7 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{2}=\mathrm{e}^{2}$.

例 8 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1-2x)^{\frac{1}{-2x}}\right]^{-2}=\mathrm{e}^{-2}$.

例 9 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+2}\right)^{x}$.

解
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{x}&=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{(x+2)-2}\\&=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{(x+2)}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{-2}=\mathrm{e}\times 1=\mathrm{e}.\end{aligned}$$

习　题　四

1. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+4}{x-1}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{3x}\right)\left(3-\dfrac{1}{x^3}\right)$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-1}{3x^2+5x+4}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$；　　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}$；

(7) $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2+x-3)$；　　(8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$.

2. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot x$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3^n\tan\dfrac{x}{3^n}\right)$；　　(4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}$.

3. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)^{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{2x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^{\frac{1}{2x}+1}$；　　　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2x}}$.

第五节　函数的连续与间断

一、函数的连续性概念

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，当自变量 x 在这个邻域内从 x_0（初值）变化到 x_1（终值）时，终值与初值之差 x_1-x_0 叫作**自变量的增量**，记作

$$\Delta x=x_1-x_0,$$

相应地，函数的终值 $f(x_1)$ 与初值 $f(x_0)$ 之差

$$f(x_1)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

叫作**函数的增量**，记作

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

这个关系式的几何解释是：函数 $f(x)$ 的增量表示当自变量从 x_0 变化到 $x_0+\Delta x$ 时，曲线 $y=f(x)$ 上对应点的纵坐标的增量，如图 1-11 所示.

下面从函数图像上来看函数在给定点 x_0 处的变化情况.

从图 1-11 中可以看出，函数 $y=f(x)$ 的图像是连续不断的曲线；而在图 1-12 中，函数 $y=g(x)$ 的图像在点 $x=x_0$ 处断开了. 因而可以说函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处是连续的，而函数 $y=g(x)$ 在点 $x=x_0$ 处有间断.

注意　增量记号 $\Delta x, \Delta y$ 是不可分割的整体，增量 Δx 可正、可负，增量 Δy 可正、可负或为零.

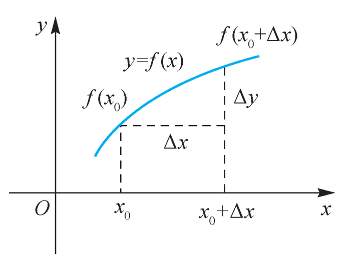


图 1-11

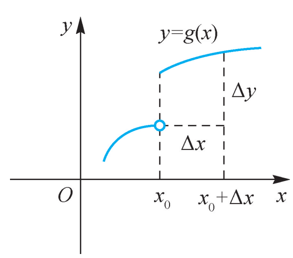


图 1-12

从图 1-12 中可以看到函数 $y=g(x)$ 从点 $x=x_0$ 到 $x_1=x_0+\Delta x$，当 Δx 趋于零时，Δy 并不趋于零，而在图 1-11 中，当 Δx 趋于零时，Δy 相应地也趋于零.

通过以上分析可知，函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续的特征是：当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta y\to 0$，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$. 函数 $y=g(x)$ 在点 $x=x_0$ 处断开的特征是：当 $\Delta x\to 0$ 时，Δy 并不趋于零，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y\neq 0$. 由此可以得到函数在点 x_0 处连续的定义.

定义　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，如果当自变量 x 在点 x_0 处的增量 Δx 趋于零时，函数 $y=f(x)$ 相应的增量

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

也趋于零,即

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0,$$

那么称**函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续**,其中 x_0 叫作函数 $f(x)$ 的**连续点**.

在上面的定义中,如果记 $x = x_0 + \Delta x$,那么 $\Delta y = f(x) - f(x_0)$. 其中,当 $\Delta x \to 0$ 时,$x \to x_0$; 当 $\Delta y \to 0$ 时, $f(x) \to f(x_0)$. 于是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续也可以定义如下.

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义,如果函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限存在,且等于它在点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$,即 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$,那么就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

由此定义可知,函数在点 x_0 处连续必须满足下面三个条件.

(1) 在点 x_0 的某个邻域内有定义.

(2) 极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在.

(3) 极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 的值等于该点的函数值 $f(x_0)$.

常用这三个条件来讨论函数 $f(x)$ 在某点处是否连续.

例 1 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}, & x \neq 3, \\ 1, & x = 3 \end{cases}$ 在点 $x = 3$ 处是否连续.

解 首先,函数 $f(x)$ 在点 $x = 3$ 处有定义,且 $f(3) = 1$.
其次,求极限

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x-2)}{x - 3} = 1.$$

因为

$$\lim_{x \to 3} f(x) = f(3),$$

所以函数 $f(x)$ 在点 $x = 3$ 处连续.

由函数左、右极限的定义,相应地可以得到函数**左、右连续**的定义.

如果

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) \text{(或} \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)\text{)},$$

那么称**函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左(或右)连续.**

显然,$f(x)$ 在点 x_0 处连续的充要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处既要左连续又要右连续.

在区间上每一点处都连续的函数,叫作在该区间上的**连续函数**,或者说函数在该区间上连续. 如果区间包括端点,那么函数在右端点处连续是指左连续,在左端点处连续是指右连续.

连续函数的图像是一条连续而不间断的曲线.

例 2 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} 2x, & -1 \leqslant x < 1, \\ x^2 + 1, & 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$ 在点 $x = 1$ 处的连续性.

解 $f(1) = 2$,且由

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(x^2+1)=2,$$
$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}2x=2,$$

知 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=2$. 因为

$$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=2,$$

所以函数在点 $x=1$ 处是连续的.

二、函数的间断点

如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不连续，则称 x_0 为**函数 $f(x)$ 的不连续点或间断点**.

例 3 讨论函数 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 的间断点.

解 因为函数 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 在点 $x=2$ 处没有定义，所以点 $x=2$ 是函数 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 的间断点，如图 1-13 所示.

$$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to2}(x+2)=4.$$

如果令 $x=2$，则 $f(x)=4$，所给函数在点 $x=2$ 处连续，这时称点 $x=2$ 为所给函数的**可去间断点**.

例 4 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\neq1,\\ 1, & x=1\end{cases}$ 的间断点.

解 函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\neq1,\\ 1, & x=1\end{cases}$ 在点 $x=1$ 处有定义（见图 1-14），且

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^+}f(x)=2,$$

但

$$\lim_{x\to1}f(x)=2\neq f(1)=1,$$

所以点 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的间断点.

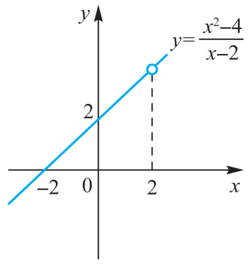


图 1-13

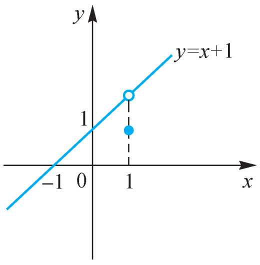


图 1-14

如果改变函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处的定义，令 $f(1)=2$，则 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处连续，此时称点 $x=1$ 为该函数的可去间断点.

例 5 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}-x-1, & x>0,\\ -x+1, & x\leqslant 0\end{cases}$ 的间断点.

解 因为

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-x+1)=1,\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(-x-1)=-1,$$

所以

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim_{x\to 0^+}f(x),$$

即 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在,所以点 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的间断点,如图 1-15 所示.

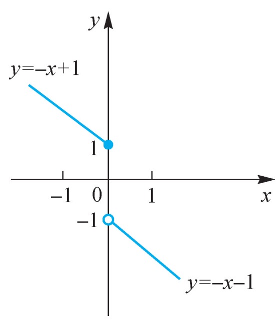


图 1-15

因为函数 $y=f(x)$ 的图像在点 $x=0$ 处产生跳跃现象,所以称点 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的**跳跃间断点.**

如果点 x_0 为间断点,且 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在,那么点 x_0 称为 $f(x)$ 的**第一类间断点**,其余的间断点称为**第二类间断点.**

对于第一类间断点 x_0,如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在,且 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$,通过补充或改变函数在点 x_0 处的函数值,使得函数在点 x_0 处连续,那么称点 x_0 为可去间断点;如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在但是它们的值不相等,那么称点 x_0 为跳跃间断点.

对于第二类间断点 x_0,$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 至少有一个不存在.

例 6 讨论函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ 在点 $x=3$ 处的连续性.

解 因为函数 $f(x)$ 在点 $x=3$ 处没有定义,所以点 $x=3$ 是间断点.又因为 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x-3}=\infty$,所以点 $x=3$ 是函数 $f(x)$ 的第二类间断点,通常又称为**无穷间断点.**

例 7 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x>0,\\ \dfrac{1}{x}, & x<0\end{cases}$ 的间断点并指出其类型.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$ 不存在,所以点 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的间断点且为第二类间断点.

例 8 讨论函数 $y=\tan x$ 在点 $x=\frac{\pi}{2}$ 处的间断类型.

解 因为函数 $y=\tan x$ 在点 $x=\frac{\pi}{2}$ 处的左极限和右极限都不存在,即

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan x=+\infty,\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\tan x=-\infty,$$

所以点 $x=\frac{\pi}{2}$ 是函数 $y=\tan x$ 的第二类间断点.

习　题　五

1. 讨论下列函数在指定点处的连续性,若是间断点,说明它们的类型.

(1) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4}(x=2)$;

(2) $f(x)=2^{\frac{1}{x-1}}(x=1)$;

(3) $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0\end{cases}(x=0)$;

(4) $f(x)=\begin{cases}2x-1, & -1<x<1,\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 2x+1, & 2<x\leqslant 3\end{cases}(x=1)$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 研究函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的左连续性及右连续性.

第六节　连续函数的运算与性质

一、连续函数的四则运算

定理 1 若函数 $f(x),g(x)$ 在点 x_0 处连续,则 $f(x)\pm g(x),f(x)\cdot g(x),\dfrac{f(x)}{g(x)}$(当 $g(x_0)\neq 0$ 时)也在点 x_0 处连续.

例如,$\sin x,\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,故

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x},\cot x=\frac{\cos x}{\sin x},\sec x=\frac{1}{\cos x},\csc x=\frac{1}{\sin x}$$

在其定义域内也连续.

二、反函数与复合函数的连续性

定理 2 若函数 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上单调增加(或单调减少)且连续,则它的

反函数 $x=\varphi(y)$ 也在对应的区间 $I_y=\{y \mid y=f(x), x\in I_x\}$ 上单调增加(或单调减少)且连续.

例如,由于 $y=\sin x$ 在闭区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加且连续,所以它的反函数 $y=\arcsin x$ 在对应区间 $[-1,1]$ 上也是单调增加且连续的. 同理可得其他反三角函数的连续性. 总之,反三角函数在其定义域内都是连续的.

定理 3 设函数 $y=f[\varphi(x)]$ 由函数 $u=\varphi(x)$ 与函数 $y=f(u)$ 复合而成,若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$,函数 $f(u)$ 在点 u_0 处连续,则有

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=\lim_{u\to u_0} f(u)=f(u_0).$$

例 1 求 $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$.

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\cos\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}&=\cos\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\\&=\cos\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}{x(\sqrt{x^2+1}+1)}\\&=\cos\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}=\cos 0=1.\end{aligned}$$

若在定理 3 的条件下假定 $\varphi(x)$ 在点 x_0 处连续,即

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0),$$

则可得到下列结论.

定理 4 设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 处连续,且 $\varphi(x_0)=u_0$,而函数 $y=f(u)$ 在点 $u=u_0$ 处连续,则复合函数 $f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 处也连续.

微课:极限与函数值-coitpy

例如,函数 $u=\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内连续. 函数 $y=\sin u$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,所以 $y=\sin\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内连续.

三、初等函数的连续性

定理 5 基本初等函数在其定义域内是连续的.

因初等函数是由基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算而得到的,故可得到下列重要结论.

定理 6 一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

小提示

定义区间是指包含在定义域内的区间. 初等函数仅在其定义区间内连续,在其定义域内不一定连续. 例如,函数 $y=\sqrt{x^2(x-1)^3}$ 的定义域为 $\{0\}\cup[1,+\infty)$,因为函数 y 在点 $x=0$ 的邻域内没有定义,所以函数 y 在点 $x=0$ 处不连续,但函数 y 在定义区间 $[1,+\infty)$ 上是连续的.

定理 6 的结论非常重要,因为高等数学的研究对象主要是连续或分段连续的函数,而在一般应用中遇到的函数基本上是初等函数,其连续性的条件总是满足

的，从而使高等数学具有强大的生命力和广阔的应用前景. 此外，根据定理 6 求初等函数在其定义区间内某点处的极限，只需求初等函数在该点处的函数值，即

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)(x_0 \in \text{定义区间}).$$

例 2 求 $\lim\limits_{x \to 1} \sin(\ln x)$.

解 因为点 $x = 1$ 是函数 $y = \sin(\ln x)$ 的连续点，所以

$$\lim_{x \to 1} \sin(\ln x) = \sin(\ln 1) = 0.$$

四、闭区间上连续函数的性质

下面介绍闭区间上连续函数的几个基本性质，由于它们的证明涉及严密的实数理论，此处不予讨论，但可以借助几何图形来理解.

先说明最大值和最小值的概念. 对于在区间 I 上有定义的函数 $f(x)$，如果存在 $x_0 \in I$，使得对任一 $x \in I$ 都有

$$f(x) \leqslant f(x_0)(\text{或 } f(x) \geqslant f(x_0)),$$

则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的**最大值**(或**最小值**).

例如，函数 $y = \cos x$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上有最大值 0 和最小值 -1. 函数 $y = \operatorname{sgn} x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有最大值 1 和最小值 -1.

定理 7(最值定理) 在闭区间上连续的函数一定有最大值和最小值.

定理 7 表明，若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则至少存在一点 $\xi_1 \in [a,b]$，使 $f(\xi_1)$ 是 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的最小值；又至少存在一点 $\xi_2 \in [a,b]$，使 $f(\xi_2)$ 是 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的最大值(见图 1-16).

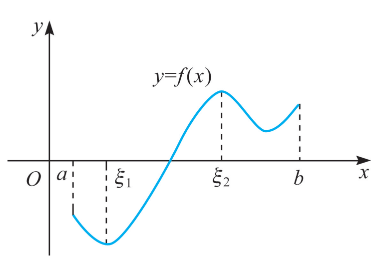


图 1-16

由定理 7 易得到下面的结论.

定理 8(有界性定理) 在闭区间上连续的函数在该区间上一定有界.

如果 $f(x_0) = 0$，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的**零点**.

定理 9(零点定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号(即 $f(a) \cdot f(b) < 0$)，则在开区间 (a,b) 内至少有函数 $f(x)$ 的一个零点，即至少存在一点 $\xi(a < \xi < b)$，使 $f(\xi) = 0$.

零点定理的几何意义是：若连续曲线 $y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 的端点处的函数值异号，则曲线与 x 轴至少有一个交点，如图 1-17 所示.

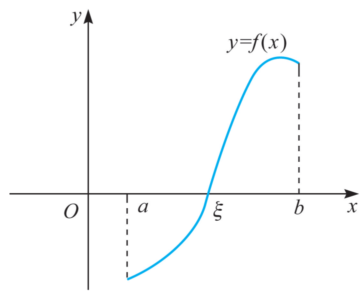


图 1-17

例 3 证明：方程 $x^5-7x+3=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

证明 令 $f(x)=x^5-7x+3$，则 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，又因为

$$f(0)=3>0, f(1)=-3<0,$$

所以由零点定理可知，在区间 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使

$$f(\xi)=0,$$

即 $\xi^5-7\xi+3=0$，由此证明方程 $x^5-7x+3=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

定理 10（介值定理） 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且在该区间的端点处有不同的函数值 $f(a)=A$ 及 $f(b)=B$，那么，对于 A 与 B 之间的任意一个数 C，在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=C$.

介值定理的几何意义是：对介于 A 与 B 之间的任意一个数 C，直线 $y=C$ 与连续曲线 $y=f(x)$ 至少有一个交点，如图 1-18 所示.

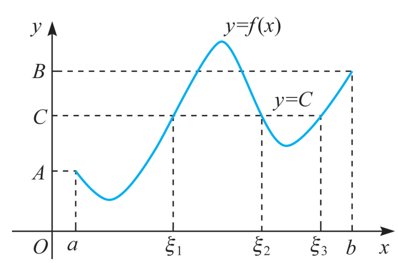


图 1-18

推论 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.

例 4 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，任取 $x_1,x_2\in(a,b)$ 且 $x_1<x_2$，证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

证明 由于 $[x_1,x_2]\subset(a,b)$，所以函数 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续，由最值定理知，$f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上有最大值 M 和最小值 m，则对任一 $x\in[x_1,x_2]$，有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$，因此

$$m\leqslant f(x_1)\leqslant M, m\leqslant f(x_2)\leqslant M,$$

从而

$$m \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \leqslant M,$$

由介值定理的推论知，至少存在一点 $\xi \in (x_1, x_2) \subset (a,b)$，使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

习 题 六

1. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x^2-2x+5}$；　　(2) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \ln(2\cos 2x)$；

(3) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x+1} \sin \dfrac{\pi x}{2}$；　　(4) $\lim\limits_{x \to 2} \arctan \sqrt{2x-3}$；

(5) $\lim\limits_{x \to \infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$；　　(6) $\lim\limits_{x \to 0} \ln \dfrac{\sin x}{x}$.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^x, & x<0, \\ a+x, & x \geqslant 0, \end{cases}$ 当 a 为何值时，$f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续？

3. 证明：

(1) $x^5-3x=1$ 在 $(1,2)$ 内至少有一个根；

(2) $x^2\cos x-\sin x=0$ 在 $\left(\pi, \dfrac{3}{2}\pi\right)$ 内至少有一个根.

育德明理

函数概念的发展历史

17 世纪，科学家们致力于运动的研究，如计算天体的位置、远距离航海时对经度和纬度的测量、炮弹的速度对于高度和射程的影响等，解决诸如此类的问题都需要探究两个变量之间的关系，并根据这种关系对事物的变化规律进行总结，如根据炮弹的速度推测炮弹能达到的高度和射程. 这正是函数产生和发展的背景.

函数概念的发展主要经历了以下几个历史时期.

1. 早期函数概念——几何观点下的函数

1673 年，德国数学家莱布尼茨（Leibniz，1646—1716）首次使用“function（函数）”表示“幂”，后来他用该词表示曲线上点的横坐标、纵坐标、切线长等随曲线变化而改变的几何量.

2. 18 世纪的函数概念——代数观点下的函数

1718 年，瑞士数学家约翰·伯努利（Johann Bernoulli，1667—1748）在莱布尼茨函数概念的基础上对函数概念进行了定义：“由任一变量和常数的任一形式构成的量.”他强调函数要用公式来表示. 1755 年，瑞士数学家欧拉（Euler，1707—1783）把函数定义为“如果某些变量以某一种方式依赖于另一些变量，即当后面这些变量变化时，前面这些变量也随着

变化，我们把前面的变量称为后面变量的函数”．他把约翰·伯努利给出的函数称为解析函数，并进一步把它区分为代数函数和超越函数，还考虑了“随意函数”．

3. 19 世纪的函数概念——对应关系下的函数

1821 年，法国数学家柯西（Cauchy，1789—1857）从定义变量起给出了函数概念：“在某些变数间存在着一定的关系，当一经给定其中某一变数的值，其他变数的值可随着而确定时，将最初的变数叫作自变量，其他各变数叫作函数．”在柯西的定义中，首次出现了“自变量”一词，同时指出对函数来说不一定要有解析表达式，不过他仍然认为函数关系要用多个解析式来表示，这是一个很大的局限．1837 年，德国数学家狄利克雷（Dirichlet，1805—1859）拓广了函数概念，他指出：“对于某区间上每个确定的 x 值，y 都有一个或多个确定的值，那么 y 叫作 x 的函数．”这个定义避免了函数定义中对依赖关系的描述，以清晰的方式被所有数学家接受，这就是人们常说的经典函数定义．

4. 现代函数概念——集合论下的函数

1914 年，德国数学家豪斯道夫（Hausdorff，1868—1942）在他的《集合论纲要》中用不明确的概念“序偶”来定义函数，其避开了意义不明确的“变量”“对应”概念．1921 年，波兰数学家库拉托夫斯基（Kuratowski，1896—1980）用集合概念来定义“序偶”，使豪斯道夫的定义更加严谨．1930 年，新的现代函数定义为“若对于集合 M 的任意元素 x，总有集合 N 确定的元素 y 与之对应，则称在集合 M 上定义一个函数，记为 $y=f(x)$．元素 x 称为自变元，元素 y 称为因变元”．

函数概念的发展与生产、生活及科学发展的实际需要紧密相关，而且随着研究的深入，函数概念不断得到严谨化、精确化的表达，这与我们学习函数的过程是一样的．

总复习题

1. 填空题.

(1) 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}+\arcsin\dfrac{2x+1}{3}$ 的定义域为________.

(2) 设 $f(x+1)=2x-1$，则 $f(2)=$ ________.

(3) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=$ ________.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+3}{3x^2-1}=$ ________.

(5) 若 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{ax+b}{x-2}=2$，则常数 $a=$ ________，$b=$ ________.

2. 选择题.

(1) 已知 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2$，则 $f(x)=$ (　　).

A. $(1+x)^2$　　B. $(1-x)^2$　　C. $\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2$　　D. $1+x$

(2) 函数 $y=\dfrac{x+3}{x^2-1}$ 在(　　)条件下为无穷小.

A. $x\to 1$　　B. $x\to -1$　　C. $x\to -3$　　D. $x\to\infty$

(3) 设函数 $f(x)=\begin{cases} x+a, & x\geqslant 0, \\ \cos x, & x<0, \end{cases}$ 当 $a=$(　　)时,函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. 2

(4) 对函数 $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ 来说,其连续区间为(　　).

A. $(-1,1)$　　B. $[-1,1]$

C. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$　　D. $(-\infty,+\infty)$

(5) $x=-1$ 是函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ 的(　　)间断点.

A. 第一类跳跃　　B. 第一类可去　　C. 第二类无穷　　D. 第二类振荡

3. 下列各题中哪些是无穷小?哪些是无穷大?

(1) $y=\sin x$,当 $x\to 0$ 时;　　(2) $y=e^{-x}$,当 $x\to+\infty$ 时;

(3) $y=\dfrac{1-x}{x}$,当 $x\to 0$ 时;　　(4) $y=x^2\sin\dfrac{1}{x^2}$,当 $x\to 0$ 时.

4. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x-3}+1\right)$;　　(2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}{x-1}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}\arctan x$;

(5) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi-x}$;　　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{2x}$;

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}$.

5. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x<0, \\ x+1, & x\geqslant 0, \end{cases}$

(1) 写出 $f(x)$ 的定义域;

(2) 求出 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$,$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$,$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$;

(3) 讨论函数在点 $x=0$ 处的连续性,若间断,指出间断点的类型.

6. 证明:当 $x\to 0$ 时,$x(1-\cos 2x)-\sin^3 x$ 与 x^3 等价.

7. 证明:方程 $x-2\sin x=1$ 至少有一个小于 3 的正根.